

# Sistemas Estelares 2024

Nuestra Galaxia: cinemática y rotación  
Prof. Gabriel Ferrero

# ¿Por qué estudiar la cinemática en la Vía Láctea?

Los estudios de la Galaxia permiten analizar la formación y evolución de las galaxias en general, y por lo tanto algunos elementos del paradigma cosmológico. Por ejemplo, los modelos dinámicos detallados de la Vía Láctea y sus satélites, en particular su distribución de masas, proporcionan restricciones críticas a la naturaleza de la materia oscura (e.g. Bonaca et al. 2019). Los modelos de masa de la Galaxia, como los de McMillan (2011, 2017) y Piffl et al. (2014) se desarrollaron para ajustar muchas restricciones observacionales simultáneamente, aunque resulte muy desafiante. Por eso, muchos trabajos a menudo se enfocan en un aspecto específico, como la caracterización de la distribución de velocidades en la Galaxia.

La distribución de velocidades de las estrellas es capaz de sondear con precisión el potencial gravitacional de la Galaxia, y por lo tanto su distribución de materia oscura. En particular, la forma del halo oscuro (e.g. esférico, oblato o prolato) determina correlaciones de velocidades, y se espera que diferentes geometrías del halo produzcan diferencias medibles.

Hagen et al. (2019)

## Movimiento Solar:

El **LSR** (*Local Standard of Rest*) **dinámico** es una partícula ficticia que *coincide instantáneamente con la posición del Sol* y se mueve en el plano de la Galaxia en una *órbita cerrada*, en un plano que pasa por la posición actual del Sol. Como consideramos que la Galaxia tiene simetría axial, la *órbita* debe ser *circular*.

**El LSR cinemático** es una partícula ficticia que se mueve con una velocidad igual al *promedio de las velocidades de las estrellas en los alrededores del Sol*. Es diferente según el Tipo Espectral (TE) y la Clase de Luminosidad (CL) de las estrellas que se tomen como referencia.

## Cinemática local

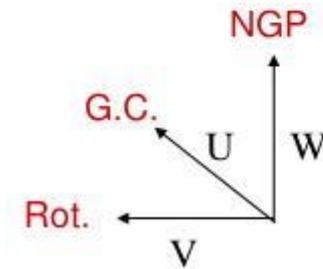
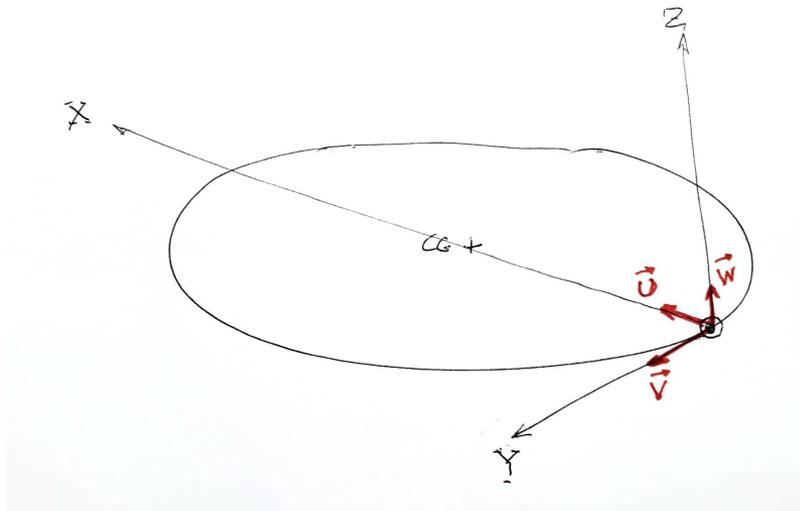
Para estudios cinemáticos de estrellas en los alrededores del Sol, consideramos las **coordenadas X, Y, Z** (**X** hacia el centro Galáctico, que abreviamos “CG”; **Y** en el plano y en la dirección de la rotación; **Z** hacia el Polo Norte Galáctico). Esto es:

$$X \rightarrow l = 0^\circ, b = 0^\circ$$

$$Y \rightarrow l = 90^\circ, b = 0^\circ$$

$$Z \rightarrow b = 90^\circ$$

y las respectivas **velocidades** serán **U, V, W**, tomadas con respecto al LSR.



Llamamos **movimiento solar** a la velocidad del Sol respecto al LSR dinámico (su *velocidad peculiar*), cuyas componentes serán  $\mathbf{U}_\odot$ ,  $\mathbf{V}_\odot$ ,  $\mathbf{W}_\odot$ . Cuando medimos estas componentes respecto al *LSR cinemático*, los valores reflejarán el estado “cinemático” de las estrellas con respecto a las cuales se mide. Podemos tener diferentes resultados según TE y CL.

**¿Por qué nos interesa calcular el movimiento solar?** Porque nuestro objetivo es estudiar la cinemática de las estrellas en los alrededores del Sol, respecto al LSR *dinámico*, o sea sus velocidades peculiares, pero como medimos las velocidades desde el Sol, éstas estarán afectadas por el movimiento solar (i.e. del Sol respecto al LSR dinámico) por lo tanto hay que corregir el efecto reflejo del movimiento solar para poder estudiar la cinemática de las estrellas respecto al LSR dinámico. Así, *para cada componente*:

$$\mathbf{U}(*\text{en LSR}) = \mathbf{U}_{\text{obs}}(*\text{desde Sol}) + \mathbf{U}_{\odot}(\text{Sol en LSR}), \quad \text{idem para } \mathbf{V} \text{ y } \mathbf{W}$$

$$\text{vel. pec. } * = \text{vel. observada}_* + \text{mov. solar (vel. Sol en LSR)}, \quad \text{para cada componente}$$

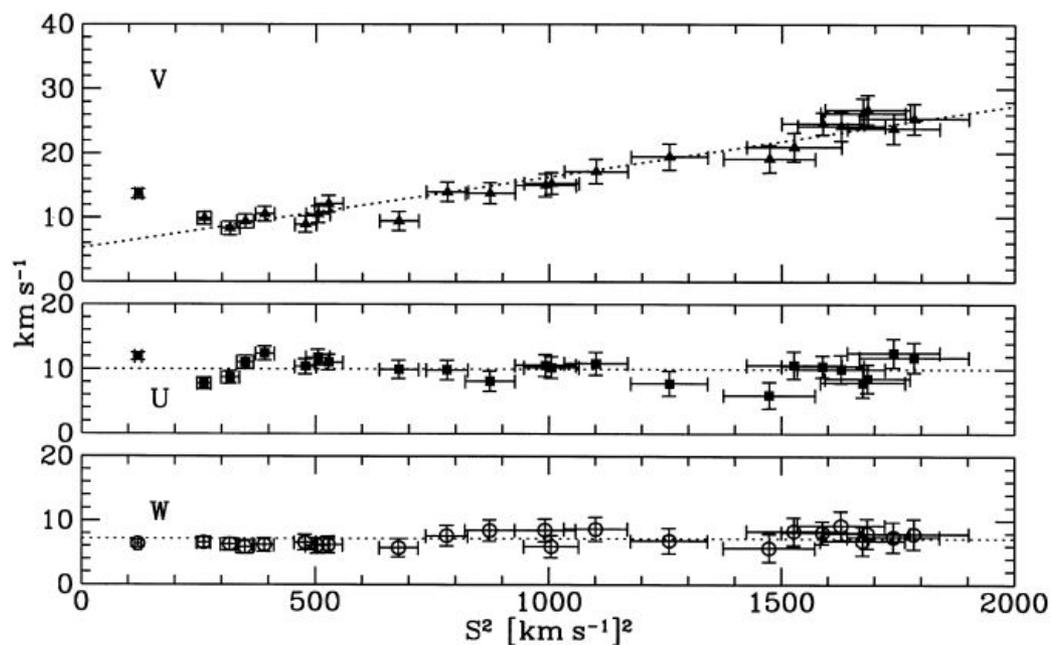
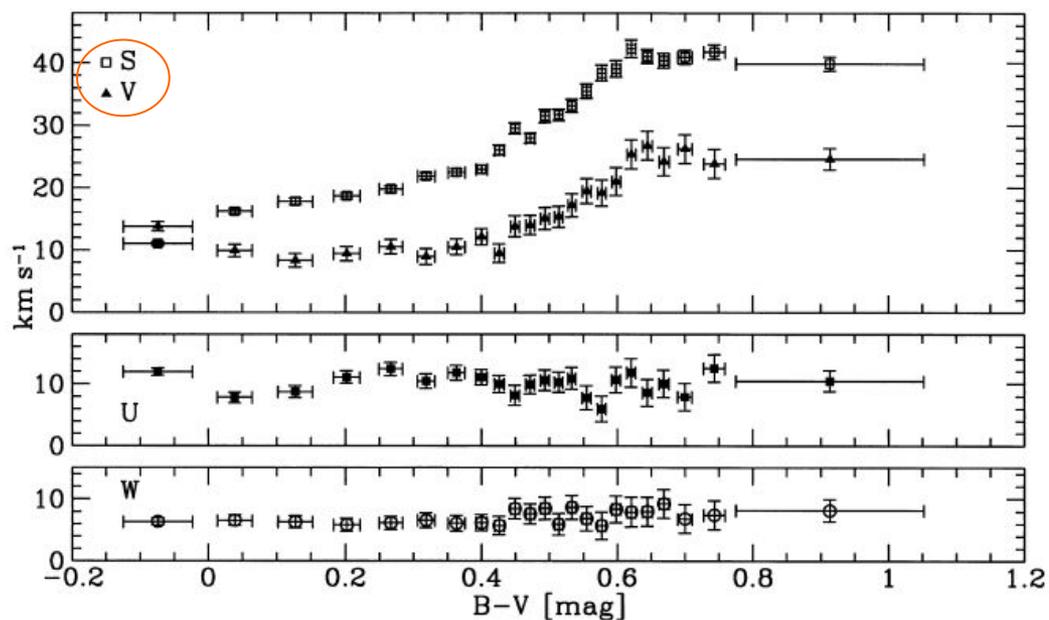
La velocidad tangencial del LSR en su movimiento circular alrededor del centro Galáctico se denomina  $\Theta_0$

# Componentes del movimiento solar respecto al LSR cinemático

Determinadas en base a **estrellas de secuencia principal** con mov propios y paralajes de Hipparcos.

Los gráficos del panel superior dan el valor de cada componente, versus el color B-V de las estrellas con respecto a las cuales se ha determinado.

El gráfico del panel inferior muestra lo mismo pero versus  $S^2$ , que es una medida del cuadrado de la dispersión de velocidades intrínseca de las estrellas con respecto a las cuales se ha determinado.



(1)

Vemos que las componentes  $U_{\odot}$  y  $W_{\odot}$  son *aproximadamente constantes* para distintos TE. Se puede calcular simplemente un promedio, resultando:

$$U_{\odot} = 10 \pm 0.4 \text{ km/s}$$

$$W_{\odot} = 7.2 \pm 0.4 \text{ km/s}$$

en cambio, la componente  $V_{\odot}$  aumenta hasta un (B-V)  $\sim 0.6$  y se mantiene constante para colores más rojos (gráfico superior). Respecto a  $S^2$  (gráfico inferior) se ve que  $V_{\odot}$  aumenta bastante linealmente, dado que en estrellas de secuencia principal (en promedio) aumenta la dispersión de velocidades intrínseca a medida que consideramos estrellas de mayor edad (principalmente por *scattering*).

Una forma de tener un único valor para cada componente del mov. solar es considerar el caso hipotético en que la  $S^2 \rightarrow 0$ , que sería el caso en que las estrellas tomadas como referencia tienen *dispersión nula* y entonces serían todas estrellas que se mueven en órbitas cerradas pasando por la posición del Sol, esto es, estaríamos calculando el mov solar respecto al LSR dinámico. Si extrapolamos las rectas del gráfico inferior hasta cortar el eje de ordenadas, ya vimos que  $U_{\odot}$  y  $W_{\odot}$  se mantienen constantes, y obtenemos para  $V_{\odot} = 5.2 \pm 0.6 \text{ km/s}$ .

Así, para el **movimiento solar respecto al LSR dinámico** obtenemos valores únicos para las tres componentes (recuadrados en verde), independientes del TE de las estrellas.

El módulo será  $V_{\odot} = 13.4 \text{ km/s}$  siendo  $V_{\odot} = \text{sqrt}(U_{\odot}^2 + V_{\odot}^2 + W_{\odot}^2)$

Vemos que respecto a cómo se movería en una órbita circular, el Sol se dirige hacia el CG, hacia el PNG y más rápido que si se moviera en tal órbita, esto es, parece que se dirigiera al *pericentro* de su órbita real.

# Un *mejor* método para la determinación de las componentes del movimiento solar respecto al LSR dinámico (cont.)

- Comparando *la cinemática estelar local*, mediante velocidades observadas (heliocéntricas) de estrellas **F y G** corregidas según esta nueva determinación del mov. solar, graficadas en verde,
- **con la *distrib. de velocidades peculiares que resultan de un modelo químico-dinámico*** (líneas sólidas), se logra el mejor ajuste quedando los valores medios de las tres componentes (aproximadamente gaussianas) todos muy cercanos a 0, que es lo esperable.

Aclaración: el hecho que la componente **V** tenga la rama de velocidades negativas *más extendida*, implica que en promedio estas estrellas se “retrasan”, en el sentido de la rotación, respecto al LSR.

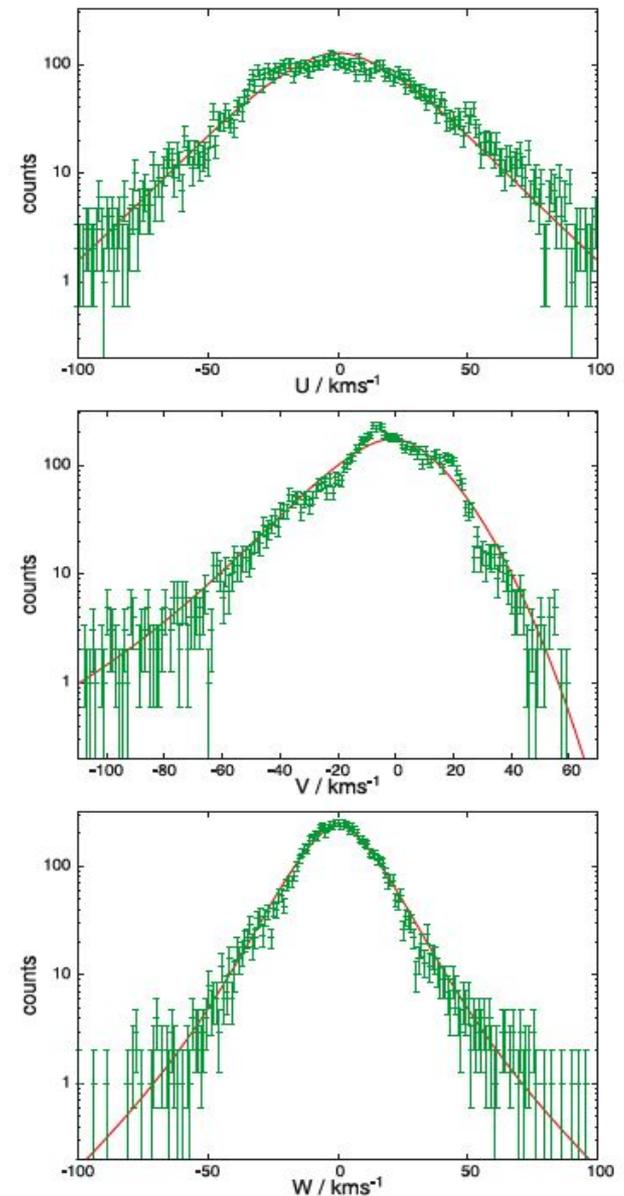


Figure 5. Curves: the model distributions predicted by the SB09a model in the  $U$ ,  $V$  and  $W$  components of velocity (from top to bottom). Data points with Poisson error bars: the observed distributions of the GCS stars shifted by our estimate of  $v_{\odot}$  to optimize the fit of the data.

# Un *mejor* método para la determinación de las componentes del movimiento solar respecto al LSR dinámico (cont.)

De este modo se obtiene

$$(U, V, W)_{\odot} = (11.1 \pm 0.7, 12.24 \pm 0.5, 7.25 \pm 0.4) \text{ km/s}$$

$$\mathcal{V}_{\odot} = 18 \text{ km/s}$$

Notar que hay una gran diferencia en la determinación de  $\mathbf{V}_{\odot}$  respecto al caso que vimos antes, lo que se refleja en el valor del módulo  $\mathcal{V}_{\odot}$ .

Se debe a la existencia de *un gradiente de metalicidad en el disco* (y la relación entre color y metalicidad), que afecta la extrapolación hacia  $S^2 = 0$  que se hizo previamente para calcular  $\mathbf{V}_{\odot}$ , resultando en ese caso un valor poco preciso.

Schönrich et al. 2010

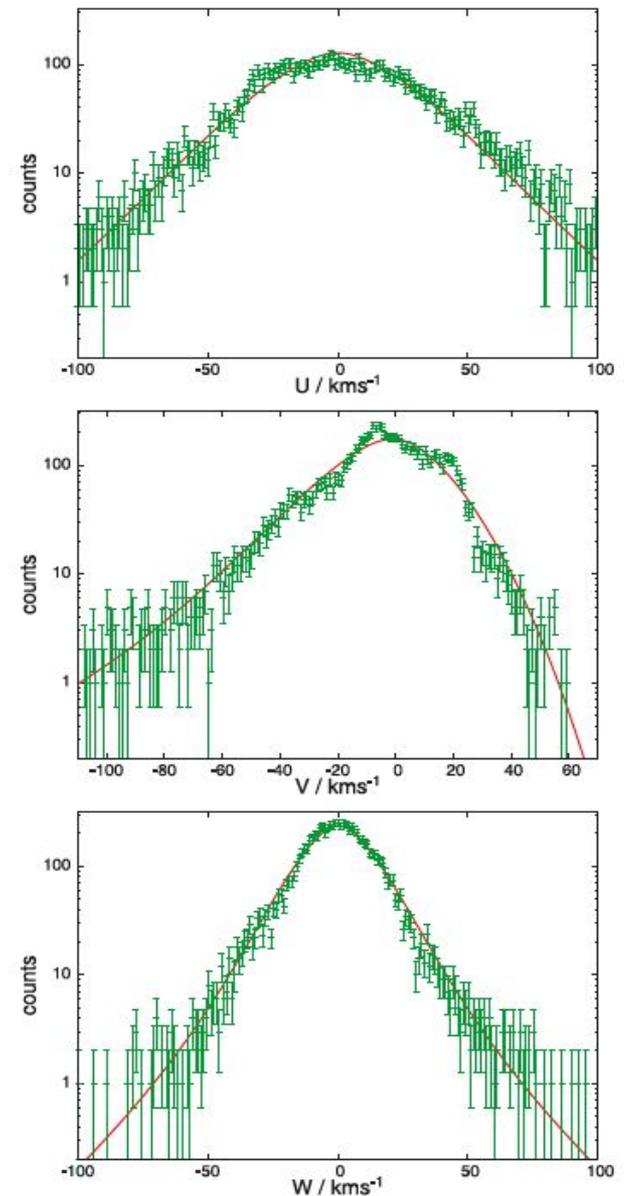


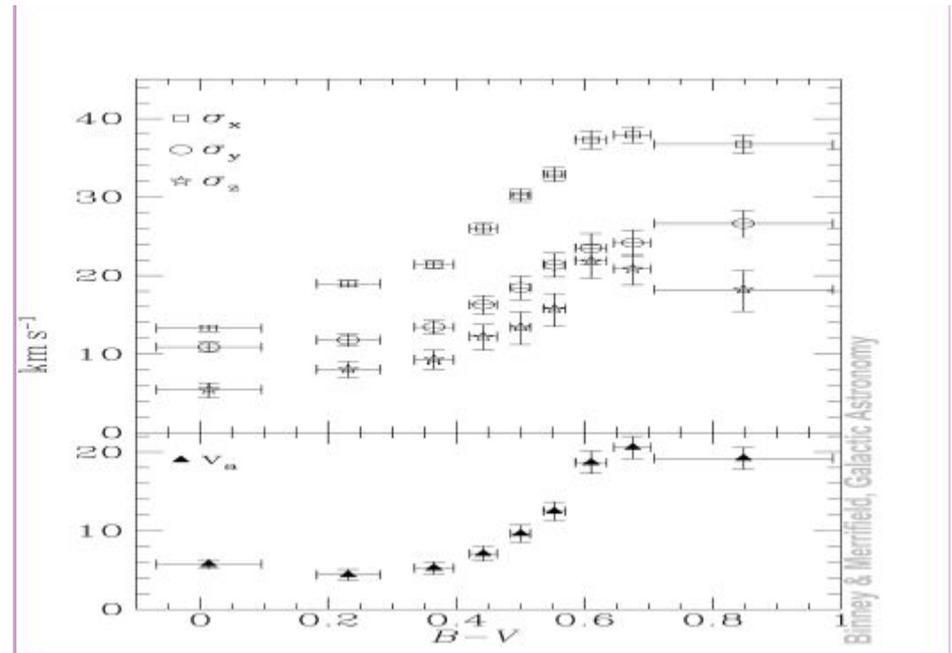
Figure 5. Curves: the model distributions predicted by the SB09a model in the  $U$ ,  $V$  and  $W$  components of velocity (from top to bottom). Data points with Poisson error bars: the observed distributions of the GCS stars shifted by our estimate of  $v_{\odot}$  to optimize the fit of the data.

El gráfico previo de  $V_{\odot}$  versus  $S^2$ , identificado como (1), muestra el reflejo del llamado “*asymmetric drift*”, que es la tendencia de la velocidad media de rotación de una dada población estelar, a *retrasarse respecto a la velocidad de rotación del LSR*, y en mayor medida cuanto mayor sea la dispersión de velocidades de la población en cuestión (i.e. para estrellas de mayor edad con mayores velocidades al azar, pues sus órbitas se desvían más respecto al mov. circular). Al referir la componente  $V_{\odot}$  del movimiento solar a una dada población, ésta aumenta a medida que el retraso se hace también mayor. La magnitud del *asymmetric drift*  $V_a$  de una población de TE y CL dadas, será en la Fig (1) la diferencia entre la coordenada “y” correspondiente a ese TE y CL respecto a la coordenada “y” en que la línea recta del ajuste corta al eje y.

Esto es:

$$V_a = V_{\odot}(S^2) - V_{\odot}(S^2=0)$$

En el gráfico de la derecha se observa el  $V_a$  determinado para *estrellas de secuencia principal* respecto al color (B-V) de las mismas.



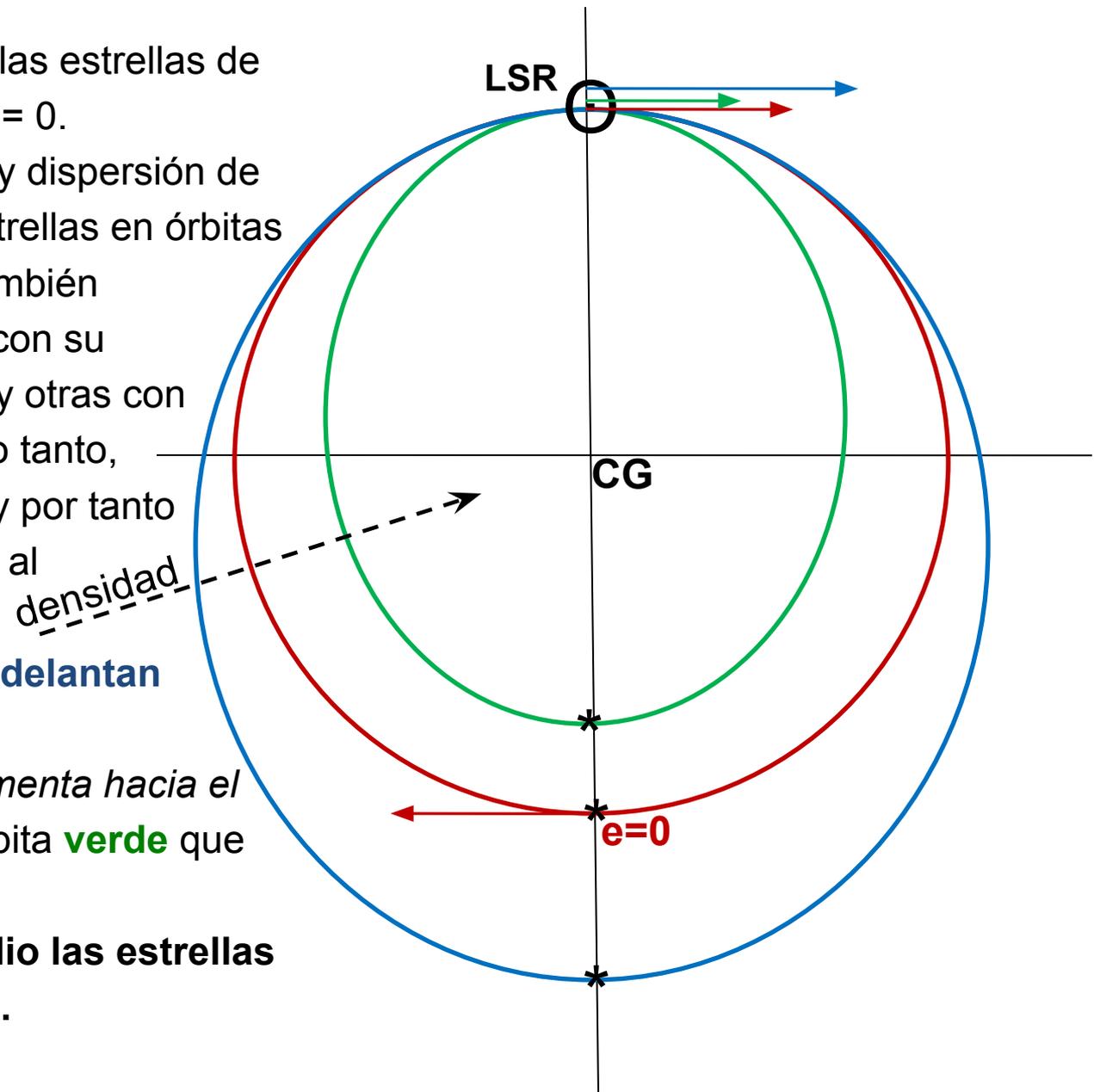
## ¿Por qué las estrellas, en promedio, están retrasadas respecto al LSR?

Supongamos que para todas las estrellas de la vecindad solar  $\langle U \rangle = \langle W \rangle = 0$ .

En los alrededores del Sol hay dispersión de velocidades  $V$ , porque hay estrellas en órbitas circulares (LSR, **roja**) pero también levemente elípticas: algunas con su apocentro en el LSR (**verde**) y otras con su pericentro allí (**azul**). Por lo tanto, algunas tendrán allí  $\Theta < \Theta_0$ , y por tanto  $V < 0$ , y se **retrasan** respecto al LSR. Otras, tendrán  $\Theta > \Theta_0$ ,  $V > 0$  y por tanto se **adelantan** respecto al LSR.

Como la *densidad estelar aumenta hacia el CG*, hay más estrellas con órbita **verde** que **azul**.

En consecuencia, **en promedio las estrellas se retrasan respecto al LSR.**

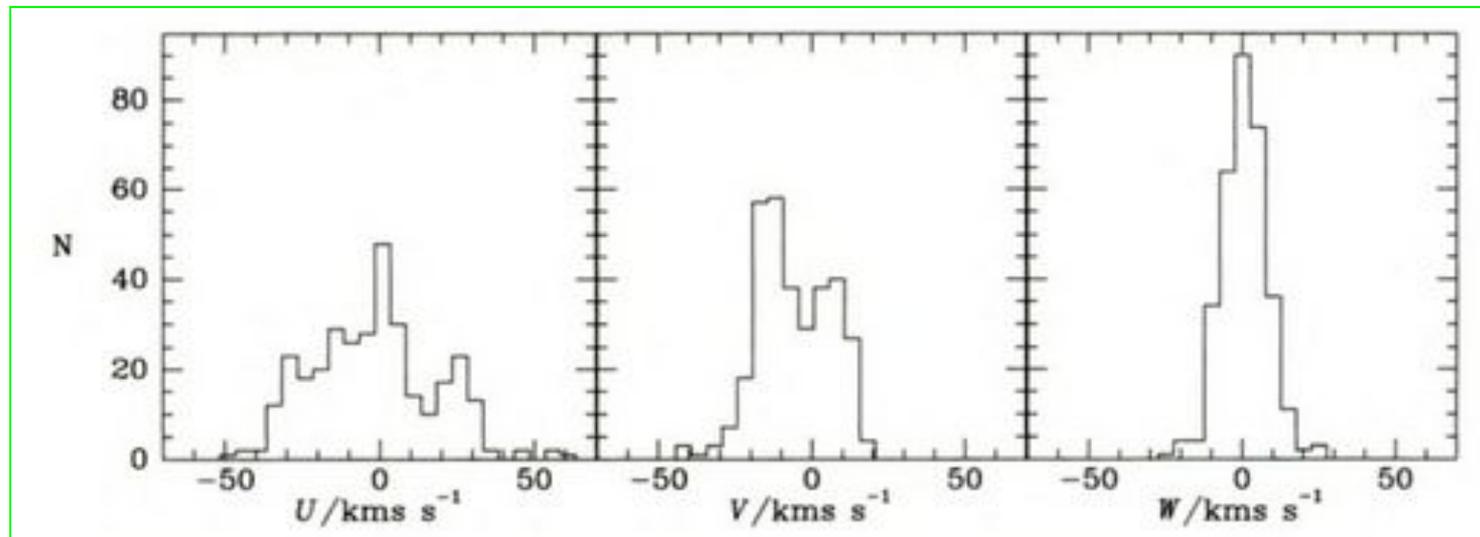


## Cinemática de estrellas del disco: *elipsoide de velocidades*

Condiciones iniciales  $\Rightarrow$  vamos a considerar:

- estrellas del disco de la Galaxia y en los alrededores del Sol
- sus *velocidades peculiares* (respecto al LSR dinámico)
- ignoramos la rotación diferencial
- serán estrellas de secuencia principal (Clase de Luminosidad = **V**)

Consideremos una muestra de estrellas de secuencia principal tempranas (más tempranas que F1, mayormente tipo A), para las que se han calculado las componentes de velocidad  $U$ ,  $V$ ,  $W$  respecto al LSR dinámico:

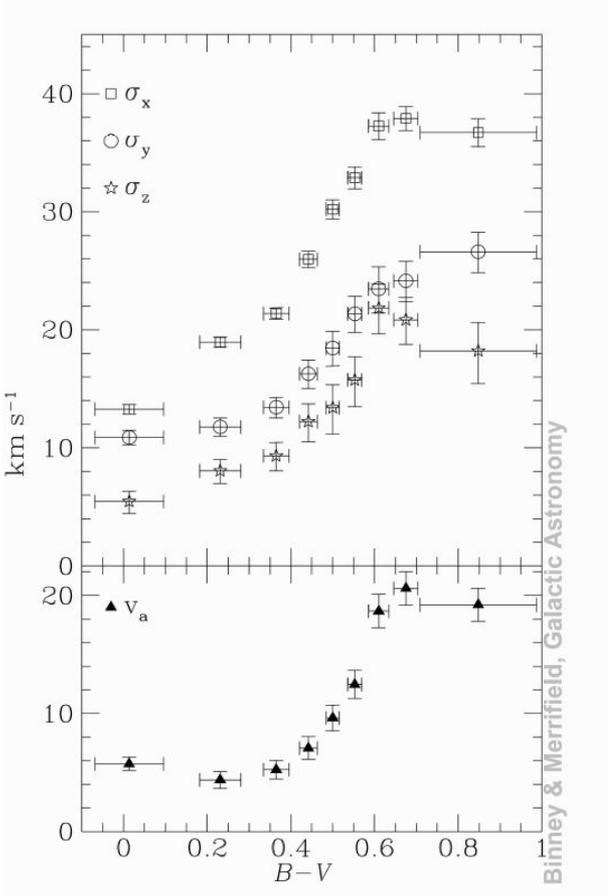


**Figure 10.14** Upper panels: histograms of  $U$ ,  $V$  and  $W$  for a sample of 323 nearby MS stars of MK type F1 and earlier.

Se observa que las tres distribuciones son aproximadamente gaussianas centradas en 0 y que la dispersión de las gaussianas es diferente (aunque las áreas deben ser iguales porque se considera el mismo número de estrellas para cada componente). Así vemos que las *estrellas tempranas* en los alrededores del Sol tienen distribuciones de velocidad gaussianas centradas en 0 pero de *diferentes dispersiones* según la dirección de las componentes.

El gráfico de la derecha muestra la variación de la dispersión de velocidades en U (en el gráfico indicado como  $\sigma_x$ ), en V ( $\sigma_y$ ) y en W ( $\sigma_z$ ), con respecto al color B-V de las estrellas consideradas.

Notemos que  $\sigma_U > \sigma_V > \sigma_W$  esto es, la dispersión es mayor en la dirección hacia el CG, menor en la dirección de la rotación, y toma el menor valor en la dirección hacia los polos Galácticos.



Binney & Merrifield, “Galactic Astronomy”

Velocity dispersion in km/s for different types of stars in the solar neighborhood.

stellar type	$\langle u^2 \rangle^{1/2}$	$\langle v^2 \rangle^{1/2}$	$\langle w^2 \rangle^{1/2}$
B0 main seq.	10	9	6
A0 main seq.	15	9	9
F0 main seq.	24	13	10
G0 main seq.	26	18	20
K0 main seq.	28	16	11
M0 main seq.	32	21	19
Class. Cepheids	13	9	5
G giants	26	18	15
M giants	31	23	16
planetary nebulae	45	35	20
white dwarfs	50	30	25
RR Lyr Var. (halo)	160	100	120

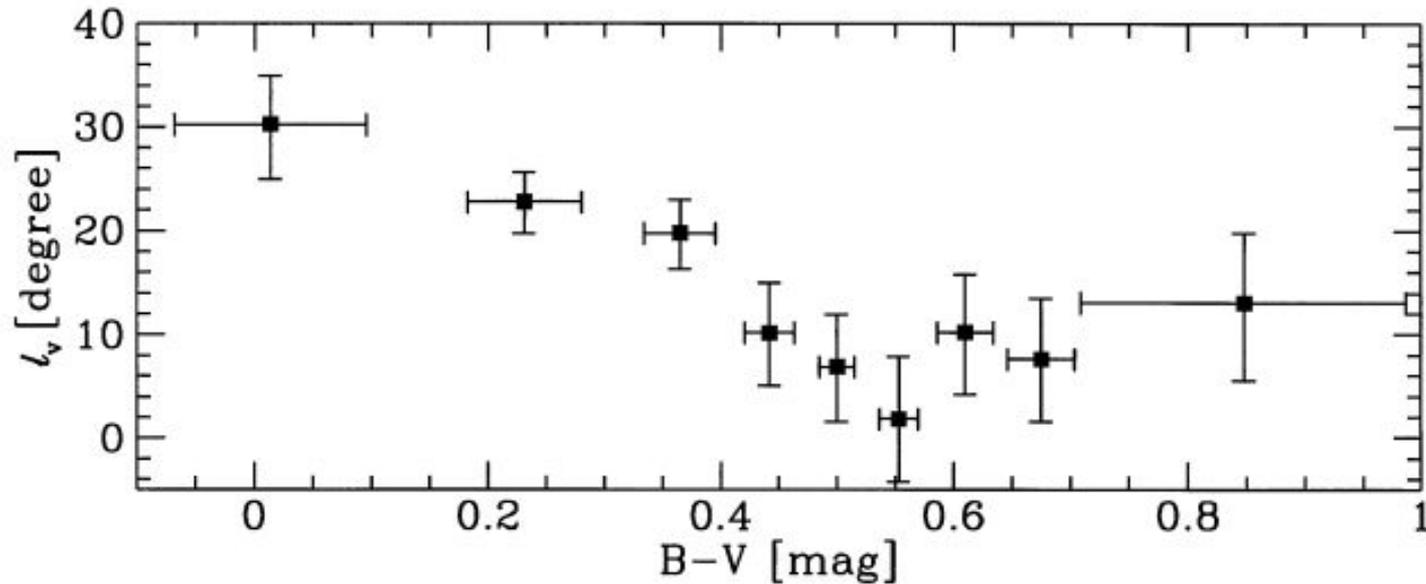


$$\sigma_U > \sigma_V > \sigma_W$$

Sin embargo, la dispersión no toma su valor máximo en la dirección de U, sino en una dirección contenida en el plano y que forma un cierto ángulo con el eje U, que varía según el TE considerado.

Ese ángulo se denomina “*vertex deviation*  $\ell_V$ ” o simplemente “*tilt of the velocity ellipsoid*”.

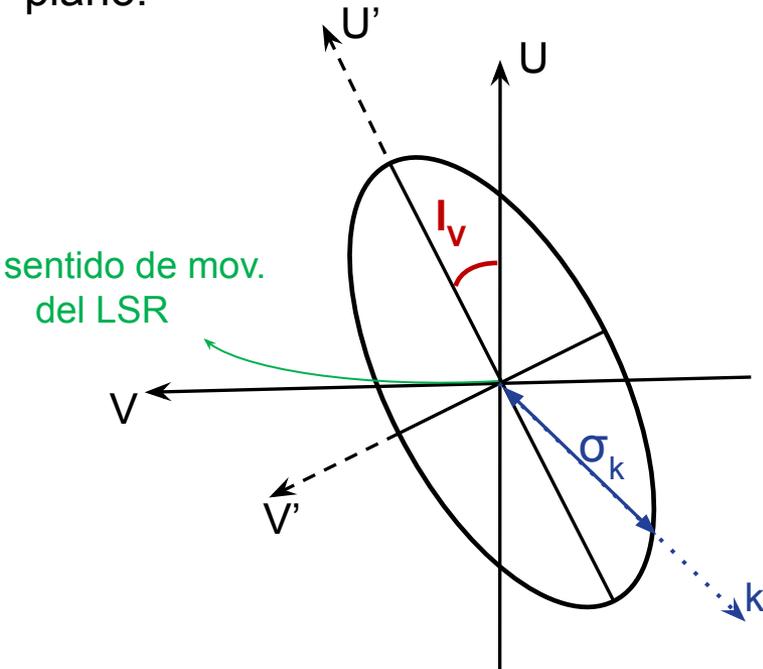
Abajo un gráfico de la desviación del *vertex*  $\ell_V$  versus color (B-V) de las estrellas consideradas: el valor del ángulo *aumenta al disminuir la edad de las estrellas* (son todas de secuencia principal).



Dehnen & Binney 1998, MNRAS, 298, 387

Si en el espacio de velocidades tenemos una distribución de velocidades al azar, cada componente corresponde a una distribución de probabilidad gaussiana con igual dispersión  $\sigma$  independientemente de la dirección. Pero en el caso de las estrellas del disco, *la dispersión es diferente según la dirección*.

La distribución de velocidades de las estrellas en los alrededores del Sol, se representa como un **elipsoide de velocidades**, esto es un elipsoide cuyos semiejes corresponden a la dispersión de velocidades en la dada dirección. Para simplificar, se ubica el eje mayor del elipsoide en la dirección de la máxima  $\sigma$ , esto es en el plano Galáctico y formando un ángulo  $l_v$  con la dirección del movimiento al CG. Si lo vemos solamente en 2 dimensiones, i.e. en el plano:



donde se realiza una *rotación de ejes*  $(U, V)$  a  $(U', V')$  para que el eje mayor coincida con la dirección de la máxima dispersión de velocidades. El centro de la elipse corresponde al LSR.

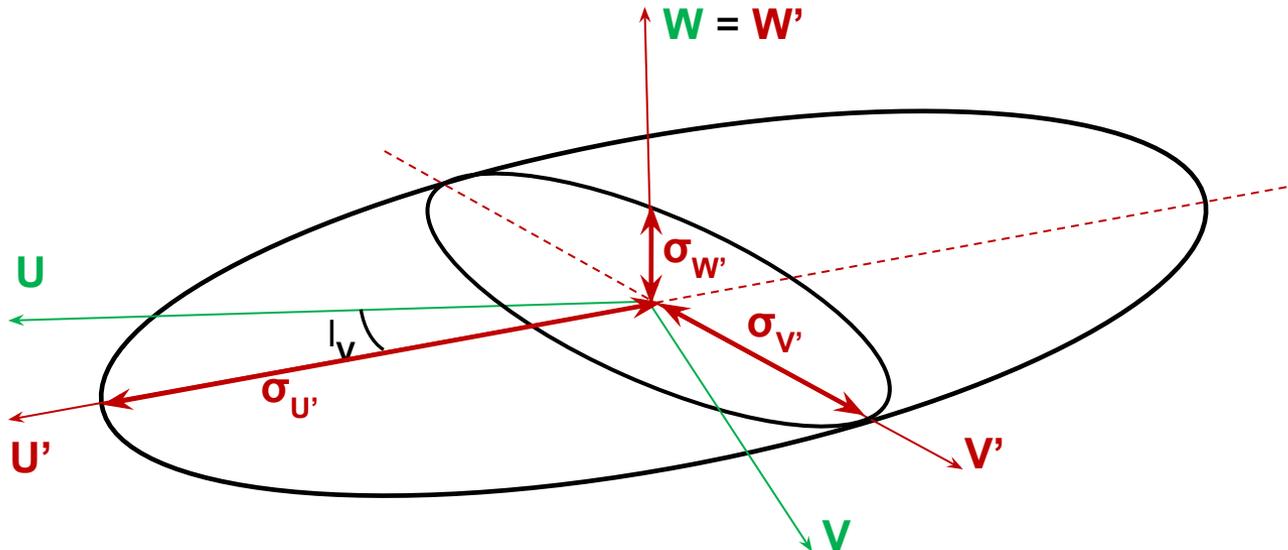
Para una dirección  $k$ , la dispersión será  $\sigma_k$ .

Para tener el elipsoide (3D) agregamos el eje  $W$ , del movimiento perpendicular al plano, que coincide con el eje  $W'$  pues no se modifica con la rotación de ejes.

La distribución de probabilidad que representa el elipsoide de velocidades es la **distribución de Schwarzschild**, donde  $(\mathbf{U}', \mathbf{V}', \mathbf{W}')$  son las velocidades peculiares (referidas al LSR) y  $(\sigma_{U'}, \sigma_{V'}, \sigma_{W'})$  las respectivas dispersiones:

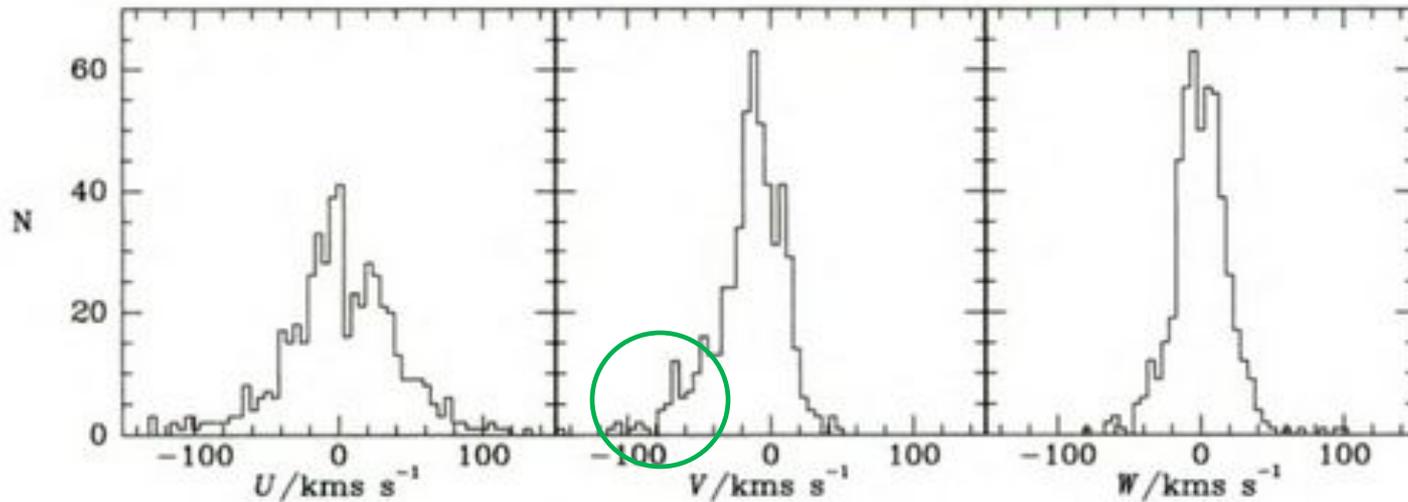
$$P(U', V', W') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_{U'} \sigma_{V'} \sigma_{W'}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U'}{\sigma_{U'}} \right)^2 + \left( \frac{V'}{\sigma_{V'}} \right)^2 + \left( \frac{W'}{\sigma_{W'}} \right)^2 \right]}$$

donde  $(P dU' dV' dW')$  es la probabilidad de tener componentes de velocidad con vel. entre  $U'$  y  $(U'+dU')$ ,  $V'$  y  $(V'+dV')$ ,  $W'$  y  $(W'+dW')$ . La probabilidad  $P$  es constante sobre elipsoides en el espacio de velocidades, y tendremos elipsoides con diferentes dispersiones según el TE y CL de la muestra de estrellas considerada.



Sin embargo, el elipsoide de velocidades **no es una buena representación para todas las estrellas**, pues las más tardías de sec ppal suelen tener asimetrías en la distrib de V, que presenta un ala más extendida hacia los valores negativos (ver también F y G en diapositiva 7):

## Distribución de velocidades de estrellas de Sec. Ppal. tipos K y M en los alrededores del Sol

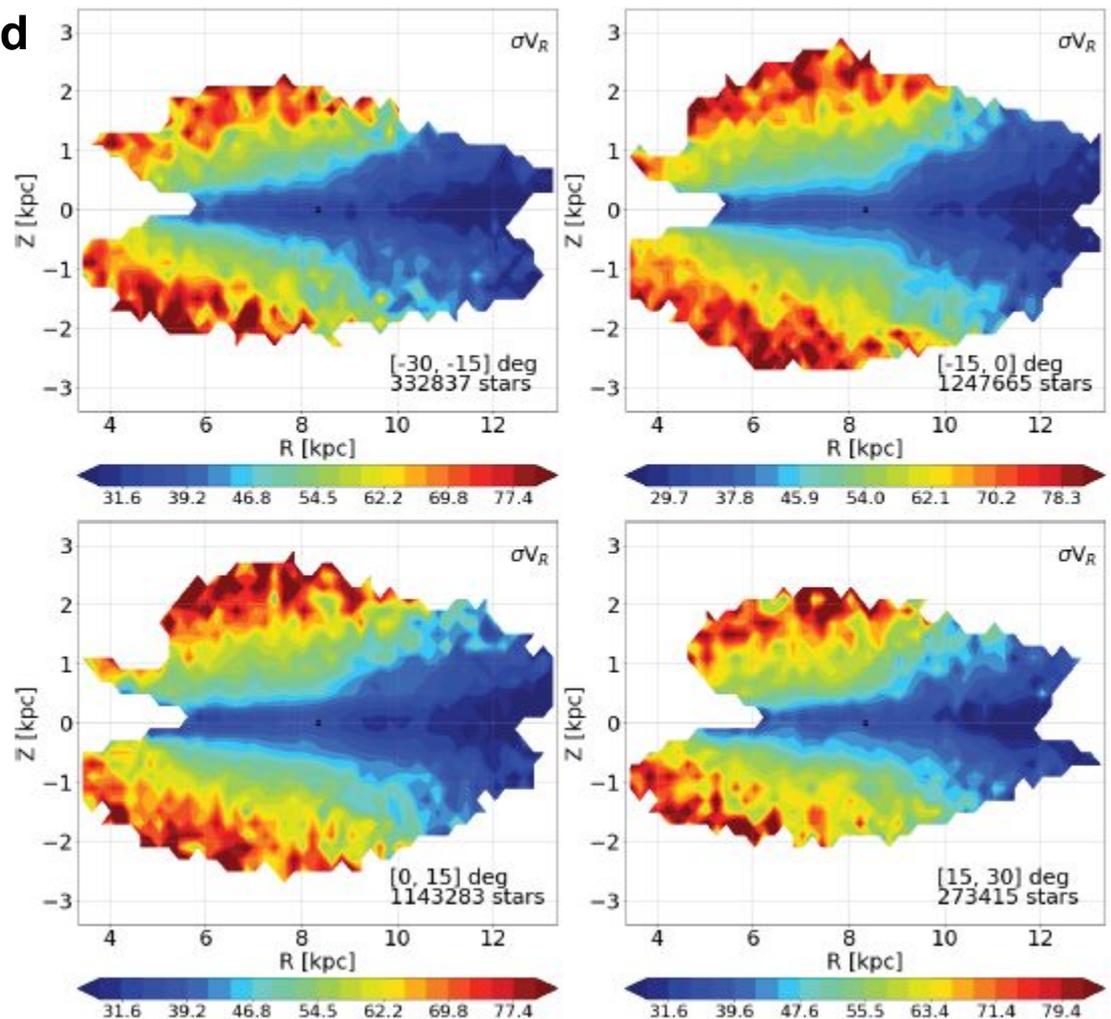


**Figure 10.14** Upper panels: histograms of  $U$ ,  $V$  and  $W$  for a sample of 323 nearby MS stars of MK type F1 and earlier. Lower panels: similar data for 510 K and M dwarfs. Velocities are with respect to the LSR that is defined by equations (10.11). [From data kindly supplied by H. Jahreiss]

Tipos espectrales K, M (enanas)

**Mapas de dispersión en velocidad radial en el plano (R, Z) para distintos rangos de ángulo acimutal, para una muestra de  $3.2 \times 10^6$  estrellas F-G-K gigantes**

Gaia Collaboration 2018, A&A, 616, A11



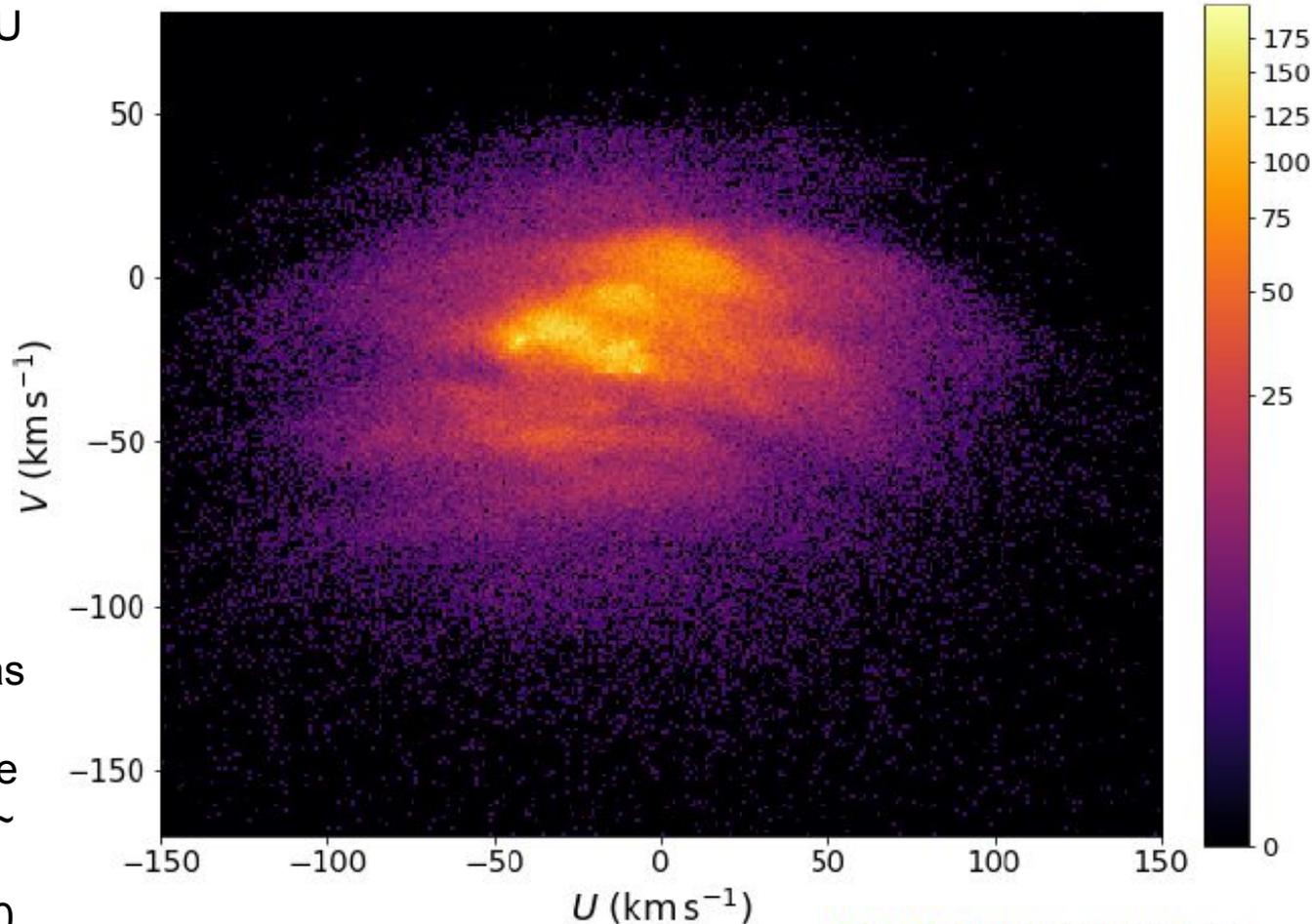
Mosaic of edge-on maps of the radial velocity dispersion, of the giant sample. Each map corresponds to a slice of 15 degrees in azimuth: [-30, -15] (top left), [-15, 0] (top right), [0, +15] (bottom left), and [+15, +30] deg (bottom right). The Sun is represented by a black dot at R = 8:34 kpc and Z = 0 kpc. The Galactic centre is located on the left side. The numbers of stars used to produce the maps are given in the lower left corners.

## Densidad de estrellas en los alrededores del Sol, en el espacio de velocidades (GAIA DR2)

“La Figura 22 muestra un histograma 2D con un “bin” de 1 km/s de las velocidades cartesianas heliocéntricas  $U$  y  $V$  en el plano, de la muestra en la *vecindad solar\**.

Esta distribución de velocidades es altamente estructurada. Observamos varias estructuras casi horizontales en forma de arco que nunca se habían visto antes. Incluso el *stream* dinámico de Hércules, localizado en velocidades  $U$  y  $V$  negativas  $\sim -50$  km/s ahora aparece dividido en al menos dos de estas ramificaciones ( a  $V \sim -38$  y  $-50$  km/s) y quizás también el *stream* a  $V \sim -70$  km/s esté asociado con esta misma estructura. ...”

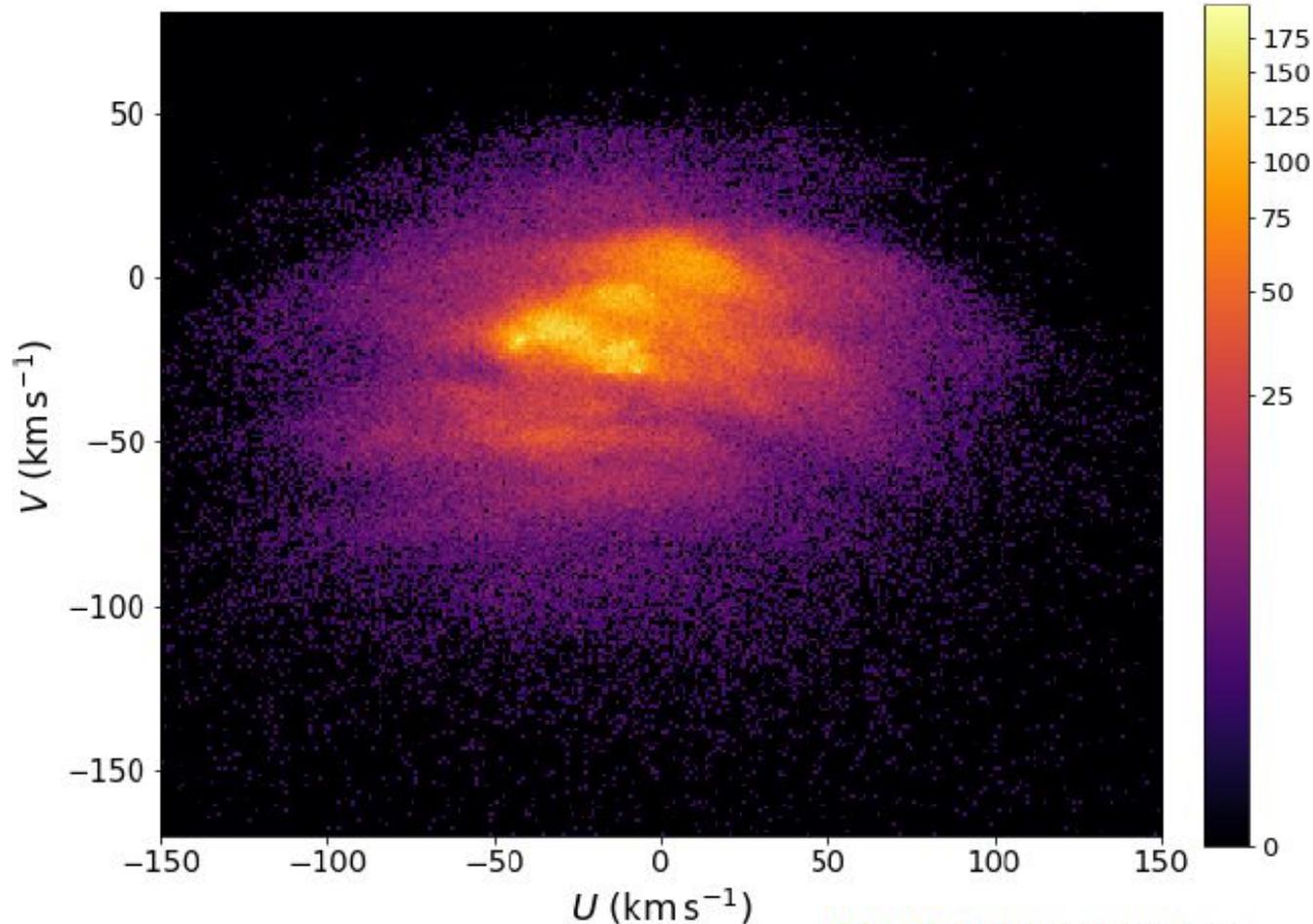
\*: estrellas F-G-K dentro de 200 pc del Sol



**Fig. 22.** Velocity plane of the stars in the solar neighbourhood. We show a 2D histogram of the velocity with a bin of  $1 \text{ km s}^{-1}$ , thus, the colour scale indicates the number of stars per  $(\text{km s}^{-1})^2$ .

## Densidad de estrellas en los alrededores del Sol, en el espacio de velocidades (GAIA DR2)

Estos arcos aparecen en todo el rango de  $V$ .  
Notamos, por ejemplo, el nuevo arco de baja densidad en  $V \sim 40$  km/s.  
Algunos de ellos no están centrados en  $U$  y otros están inclinados en  $V$ .  
Adicionalmente, hay claramente también una sub-densidad de estrellas con una forma de arco que se extiende desde  $(U; V) \sim (-100; -25)$  hasta  $(U; V) \sim (75; -65)$  km/s”



**Fig. 22.** Velocity plane of the stars in the solar neighbourhood. We show a 2D histogram of the velocity with a bin of  $1 \text{ km s}^{-1}$ , thus, the colour scale indicates the number of stars per  $(\text{km s}^{-1})^2$ .

Bibliografía recomendada para Cinemática Local: “Galactic Astronomy”, Binney & Merrifield

## Rotación Galáctica

Sabemos que el disco de nuestra Galaxia posee un movimiento de rotación alrededor de un eje perpendicular que pasa por el CG, y el Sol describe una órbita aproximadamente circular de radio  $R_{\odot}$ . Interesa estudiar la variación de la *velocidad de rotación con la distancia al centro* para poder construir **la curva de rotación**, que dará información sobre cómo actúan las fuerzas gravitatorias en la Galaxia, la distribución de masa y en general, la dinámica.

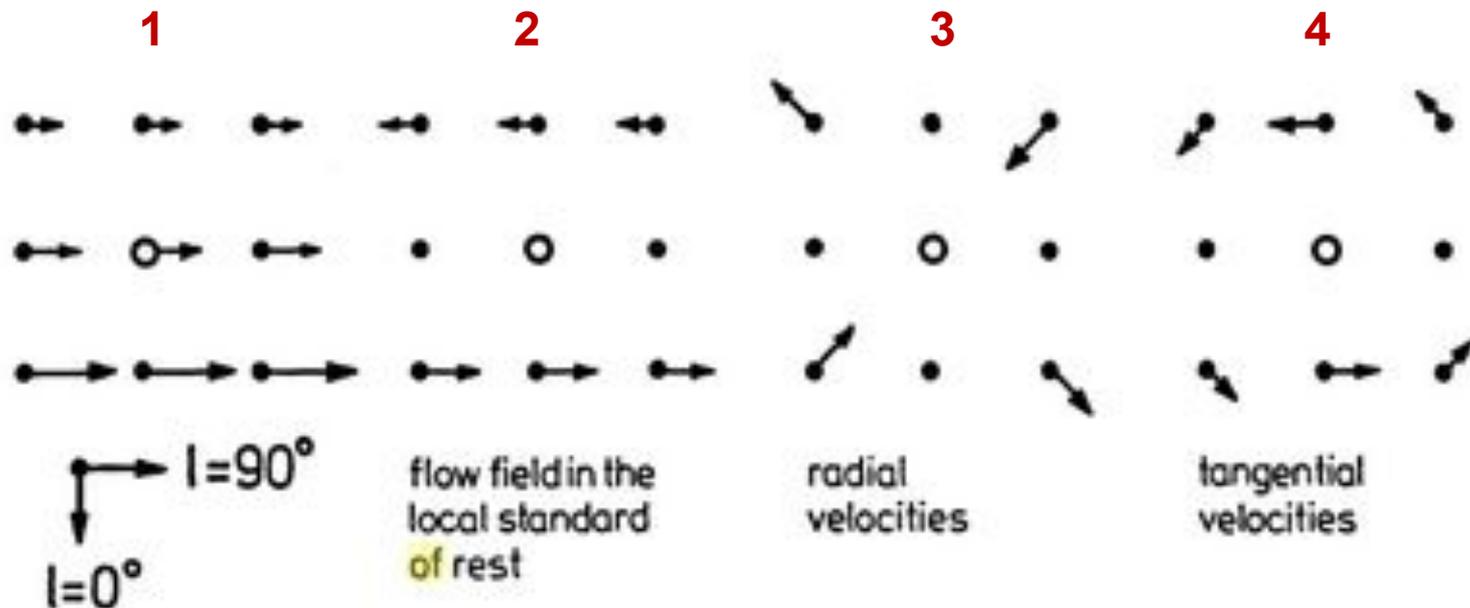
Supondremos que el material del disco está **estrictamente en rotación circular** alrededor del eje perpendicular al plano y que pasa por el CG, o sea para las estrellas del disco en los alrededores del Sol sus velocidades peculiares (respecto al LSR, al azar) son mucho menores que la velocidad de rotación del LSR alrededor del CG, por tanto vamos a suponer que existe **rotación pura y despreciar los movimientos al azar en el plano y perpendiculares al plano**. Así será equivalente referirnos al Sol o al LSR dinámico.

Como primera aproximación podemos considerar órbitas keplerianas. Suponemos un objeto de masa  $m$  en órbita alrededor de la Galaxia, cuya masa  $M$  está concentrada hacia el centro. Eso implica que la fuerza centrípeta sea igual a la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m V^2}{R} = \frac{G m M}{R^2} \Rightarrow V \propto \frac{1}{\sqrt{R}} \quad \text{siendo además} \quad \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{V}{R} \propto \frac{1}{R^{3/2}}$$

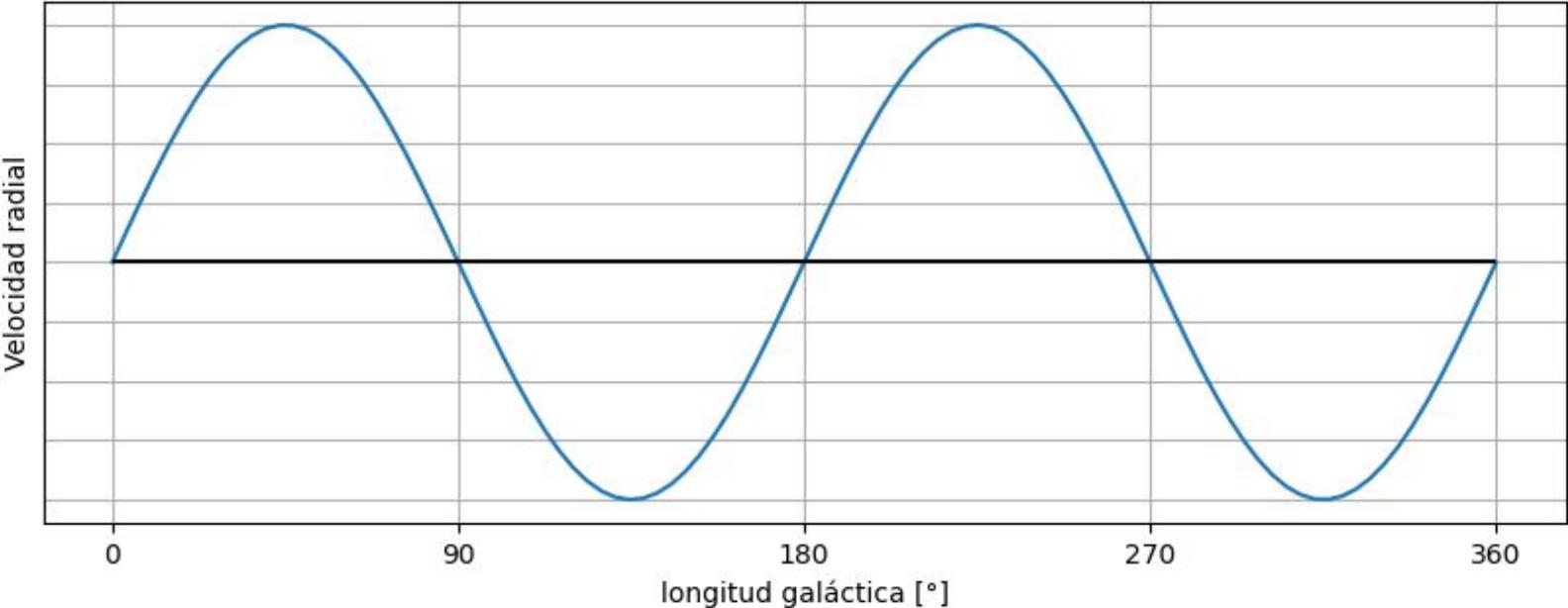
esto implica que cuanto más pequeña es la órbita (menor  $R$ ), el período  $P$  es más corto y la velocidad angular  $\omega$  es mayor. Esto muestra que el disco de la Galaxia *no se mueve como cuerpo rígido* sino que las estrellas más cercanas al centro tienen períodos más cortos, lo que implica una **rotación diferencial**.

*Cualitativamente*, el efecto de la rotación diferencial se muestra en los siguientes gráficos, que representan **objetos cercanos al sol**, pero a distancias diferentes del CG. El círculo del centro es el Sol (LSR). El **1** muestra el movimiento visto desde “fuera” del plano, el **2** respecto al Sol, y los **3** y **4** muestran las componentes radiales y tangenciales de este último. Así, **la rotación diferencial da lugar a componentes en velocidad radial y tangencial respecto al Sol, que son diferentes según la long galáctica.**



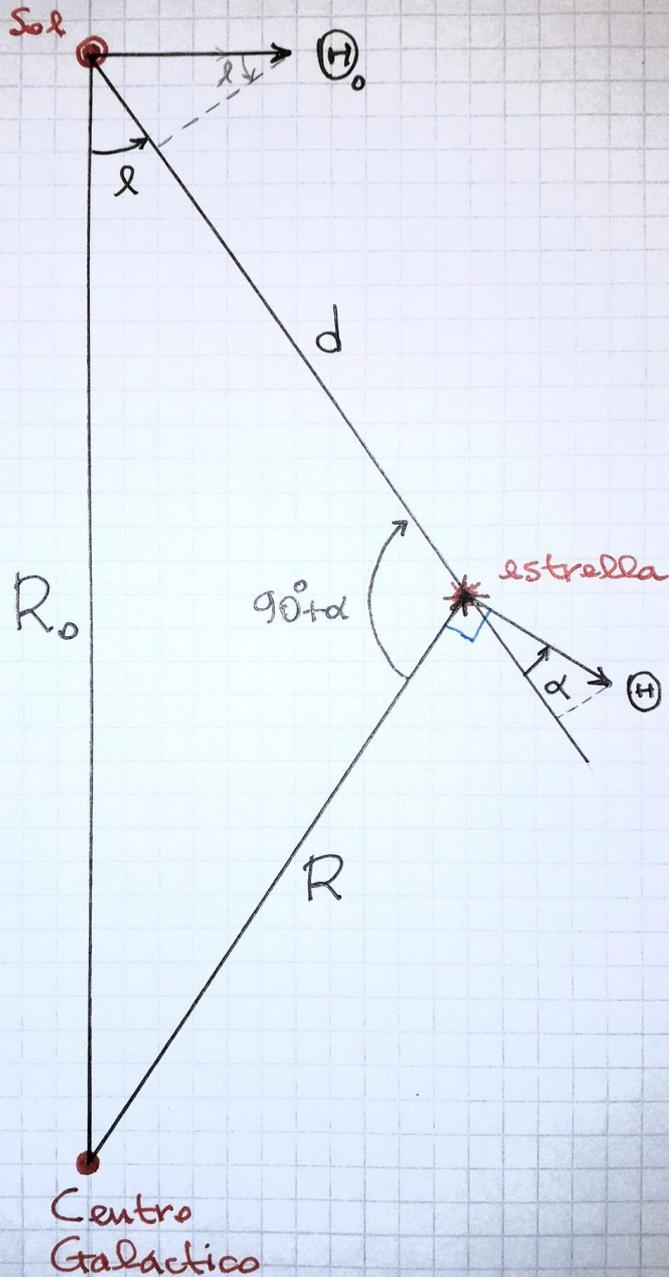
Esto es, cuando medimos la velocidad de estrellas hay una componente de velocidad propia respecto al LSR (que ahora despreciamos) y otra componente que es el *reflejo* de la rotación galáctica diferencial.

Si representamos entonces la velocidad radial de esos objetos cercanos al sol en función de su longitud galáctica, ese análisis cualitativo indica que deberíamos obtener, aproximadamente, un gráfico de este tipo:



Busquemos ahora algunas ecuaciones útiles para la velocidad radial ( $v_R$ ), la velocidad tangencial ( $v_T$ ) y el movimiento propio en longitud galáctica ( $\mu_l$ ) para objetos que rotan en la Galaxia con rotación diferencial. Definimos las siguientes variables:

- $R$  : radio galactocéntrico. Distancia desde un punto del plano Galáctico hasta el centro de la Galaxia
- $R_o$  : radio galactocéntrico del Sol (en el plano Galáctico)
- $\Theta$  : velocidad de rotación lineal de la Galaxia en un punto de radio  $R$
- $\Theta_o$  : velocidad de rotación lineal de la Galaxia en un punto de radio  $R_o$
- $\omega = \Theta/R$  : la frecuencia de rotación angular de la Galaxia en un punto de radio  $R$
- $\omega_o = \Theta_o/R_o$  : la frecuencia de rotación angular de la Galaxia en un punto de radio  $R$
- $d$  : distancia desde el Sol hasta un objeto que está en un punto de radio  $R$
- $v_R$  : velocidad radial observada de un objeto, relativa al sol
- $v_T$  : velocidad tangencial observada de un objeto, relativa al sol
- $l$  : longitud galáctica de un objeto observado



De la Figura I puede verse que la velocidad radial  $v_R$  es la diferencia entre las proyecciones de las velocidades de rotación  $\Theta$  y  $\Theta_0$  sobre la dirección radial desde el Sol hacia la estrella, es decir que:

$$v_R = \Theta \cos \alpha - \Theta_0 \sin l \quad (1)$$

Por otra parte, aplicando el teorema del seno en el triángulo Sol – Estrella – Centro Galáctico, obtenemos:

$$\frac{\sin l}{R} = \frac{\sin (90^\circ - \alpha)}{R_0} = \frac{\cos \alpha}{R_0} \quad (2)$$

de donde

$$\cos \alpha = \frac{R_0 \sin l}{R} \quad (3)$$

Y por tanto

$$v_R = \left( \frac{\Theta R_0}{R} \right) \sin l - \Theta_0 \sin l \quad (4)$$

o lo que es igual

$$v_R = \left( \frac{\Theta R_0}{R} \right) \sin l - \Theta_0 \frac{R_0}{R_0} \sin l$$

donde, recordando que  $\omega = \Theta/R$  y  $\omega_0 = \Theta_0/R_0$ , se obtiene

$$v_R = \omega R_0 \sin l - \omega_0 R_0 \sin l$$

y finalmente

$$v_R = (\omega - \omega_0) R_0 \sin l \quad (5)$$

Las ecuaciones 4 y 5 son generales y se obtuvieron asumiendo solamente que la rotación galáctica es estrictamente circular.

Deduzcamos ahora las velocidades tangenciales. Notemos primero que la velocidad tangencial  $v_T$  es la diferencia entre las proyecciones de las velocidades de rotación  $\Theta$  y  $\Theta_o$  sobre la dirección perpendicular a la dirección radial Sol - Estrella, que sería la dirección tangencial. En la misma Figura I, vemos que esa diferencia sería

$$v_T = \Theta \sin \alpha - \Theta_o \cos l \quad (6)$$

donde  $v_T$  se mide en la dirección de  $l$  creciente.

De la Figura II notamos que

$$R \sin \alpha = R_o \cos l - d \quad (7)$$

de donde

$$\sin \alpha = \frac{R_o \cos l - d}{R} \quad (8)$$

y reemplazando en (6)

$$v_T = \Theta \left( \frac{R_o \cos l - d}{R} \right) - \Theta_o \cos l \quad (9)$$

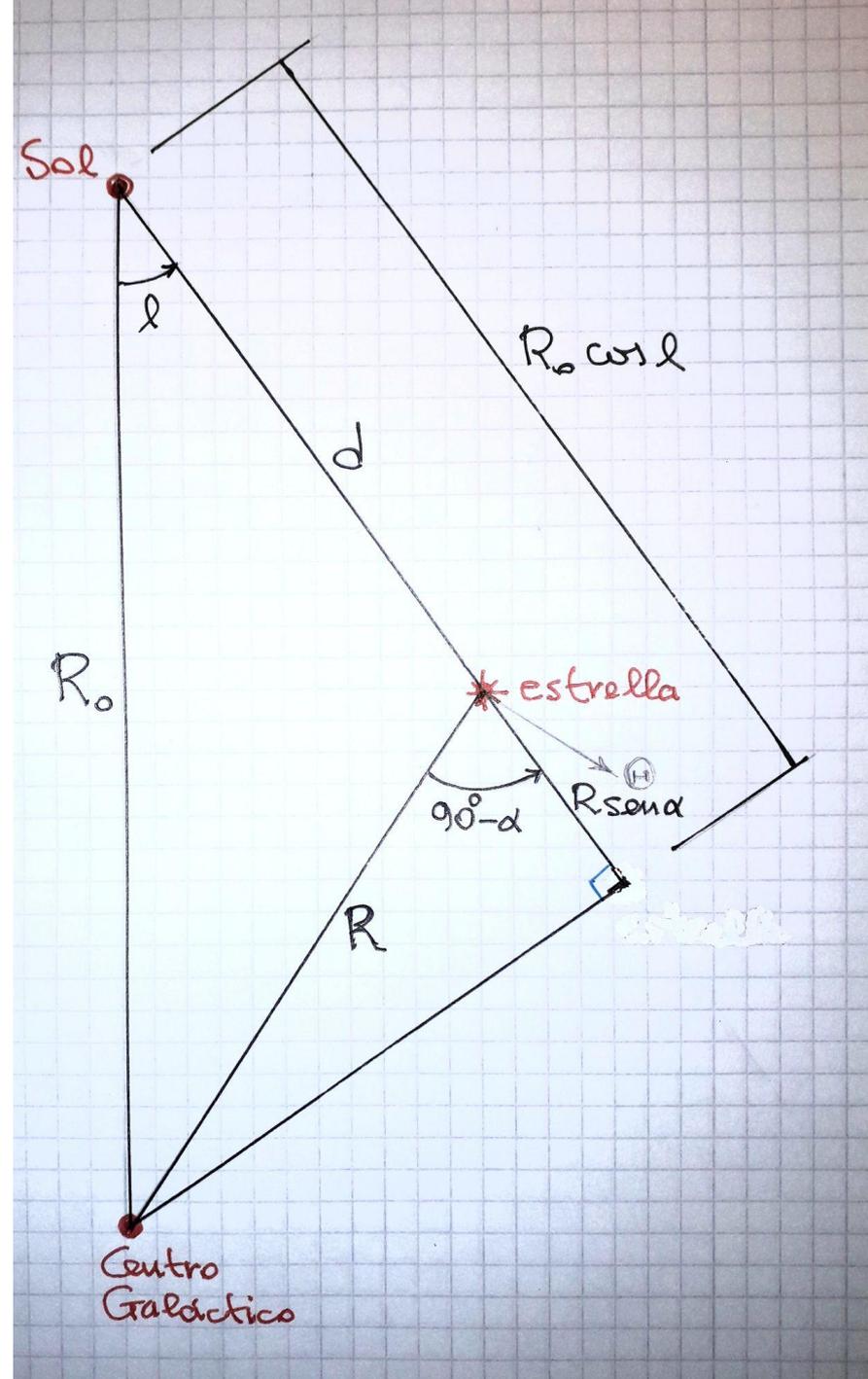
y como  $\omega = \Theta/R$  y  $\Theta_o = \omega_o R_o$ , resulta

$$v_T = \omega (R_o \cos l - d) - \omega_o R_o \cos l \quad (10)$$

sacando como factor común  $R_o \cos l$ , resulta

$$v_T = (\omega - \omega_o) R_o \cos l - \omega d \quad (11)$$

Donde una vez más notemos que las ecuaciones (9) y (11) son válidas en general para una rotación estrictamente circular.



Es importante notar algunas características que se deducen de las ecuaciones recién obtenidas. Supongamos que la velocidad de rotación angular  $\omega(R)$  es **monótonamente decreciente respecto a  $R$** , y consideremos la variación de  $v_R$  como dada por la ec. (5) en función de la longitud  $l$ .

Para latitudes del II cuadrante ( $90^\circ < l < 180^\circ$ ) al observar a distancias  $d$  crecientes, es obvio que vemos regiones a distancias galactocéntricas crecientes  $R > R_0$ , con valores progresivamente menores de  $\omega < \omega_0$ . De allí que usando la ec. (5), mediremos valores negativos crecientes de  $v_R$  a medida que aumenta  $d$ , Como mostramos esquemáticamente en las siguientes figuras.

Análogamente, en el III cuadrante ( $180^\circ < l < 270^\circ$ )  $v_R$  será positiva y crecerá monótonamente con la distancia  $d$ .

Por otro lado, si miramos en alguna dirección del Ier. cuadrante ( $0^\circ < l < 90^\circ$ ), al aumentar  $d$ , primero observaremos regiones con valores de  $R$  menores, por tanto valores de  $\omega$  mayores, y entonces  $v_R$  en esas regiones es positiva. A un cierto punto, la línea de vista llega a su distancia galactocéntrica mínima  $R_{\min} = R_0 \sin l$ , donde  $d = R_0 \cos l$ , y  $\omega$  alcanza su máximo valor para esa longitud  $l$ , y lo mismo sucede con  $v_R$ . Luego de este punto de tangencia,  $R$  crece nuevamente; por lo tanto decrece  $\omega$  y  $v_R$  también decrece. Eventualmente,  $R$  nuevamente igualará a  $R_0$  y, como asumimos que todos los objetos con  $R = R_0$  giran alrededor del centro Galáctico con la misma velocidad angular  $\omega_0$  que el sol, quedarán fijos respecto al sol y por tanto tendrán  $v_R = 0$ .

$$v_R = (\omega - \omega_0) R_0 \sin l$$

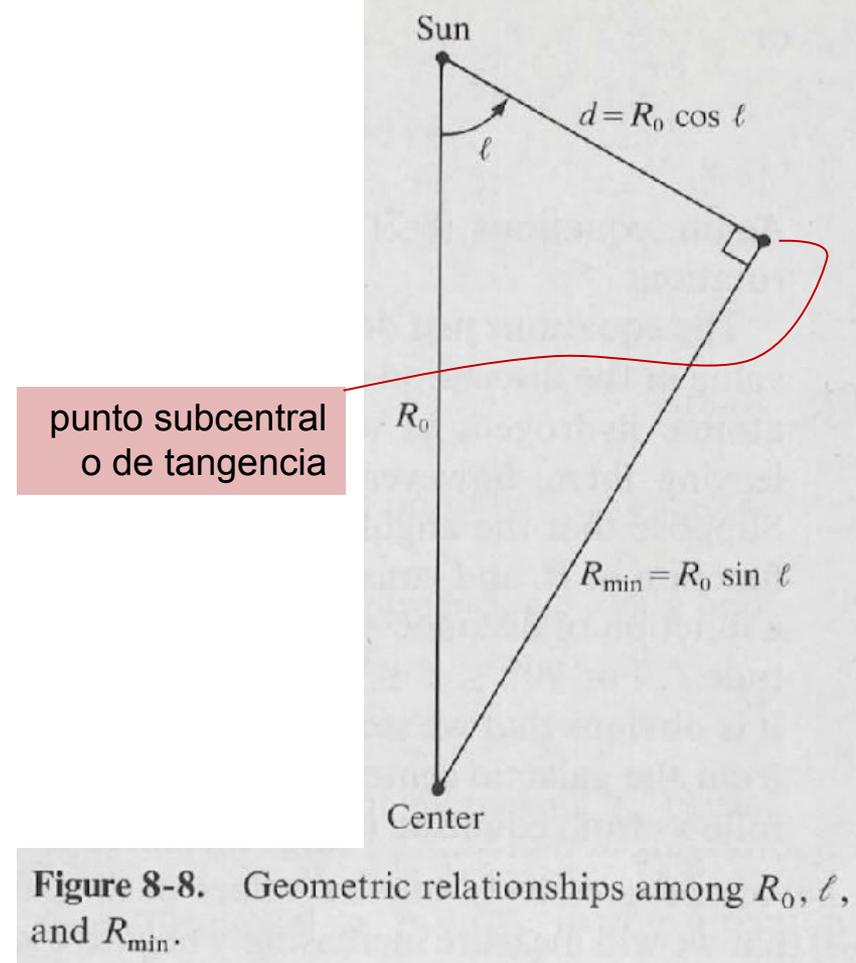
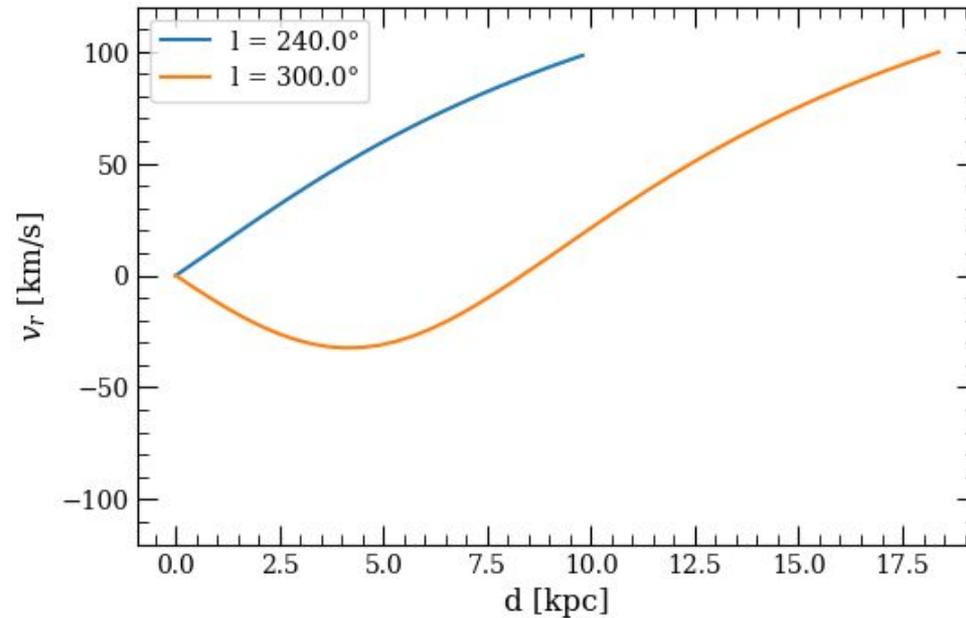
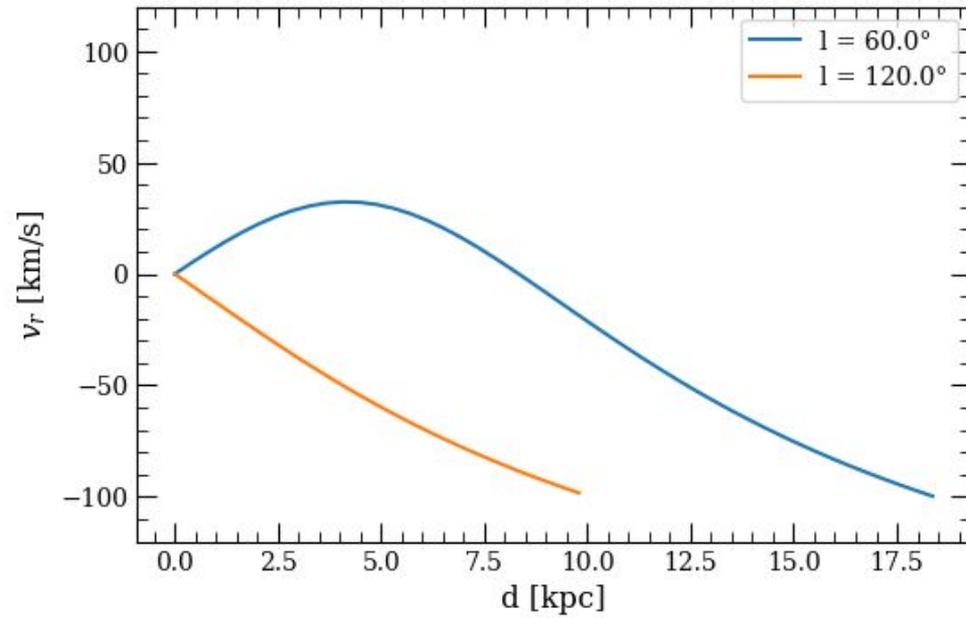


Figure 8-8. Geometric relationships among  $R_0$ ,  $l$ , and  $R_{\min}$ .

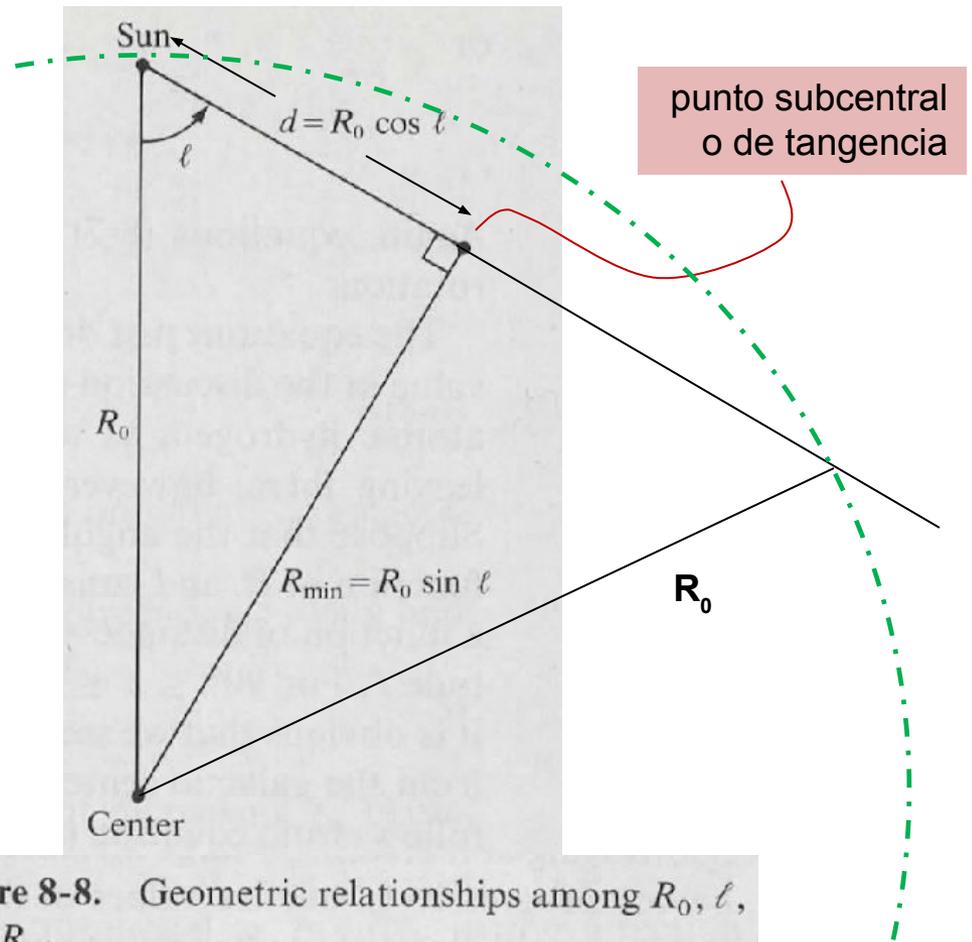
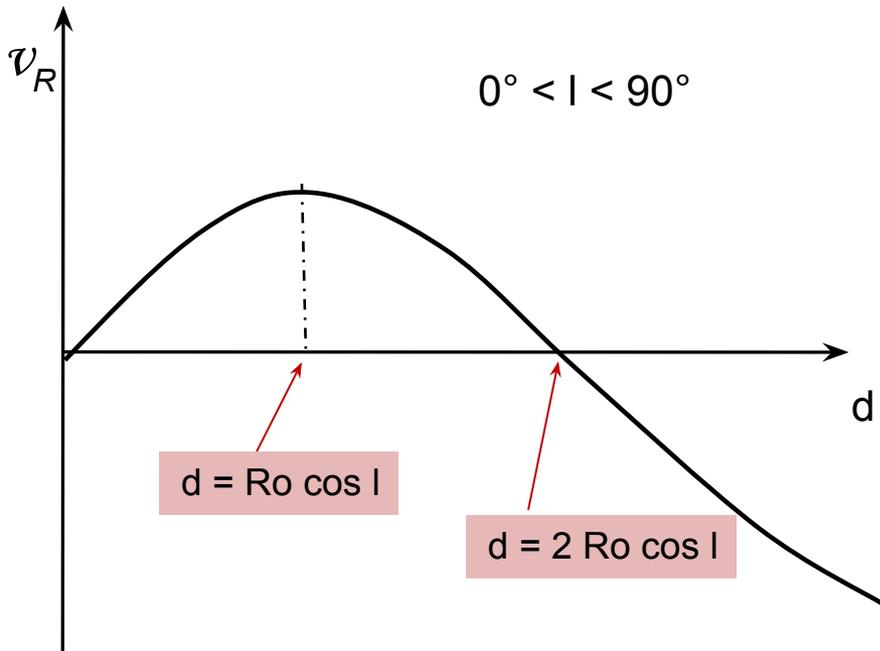
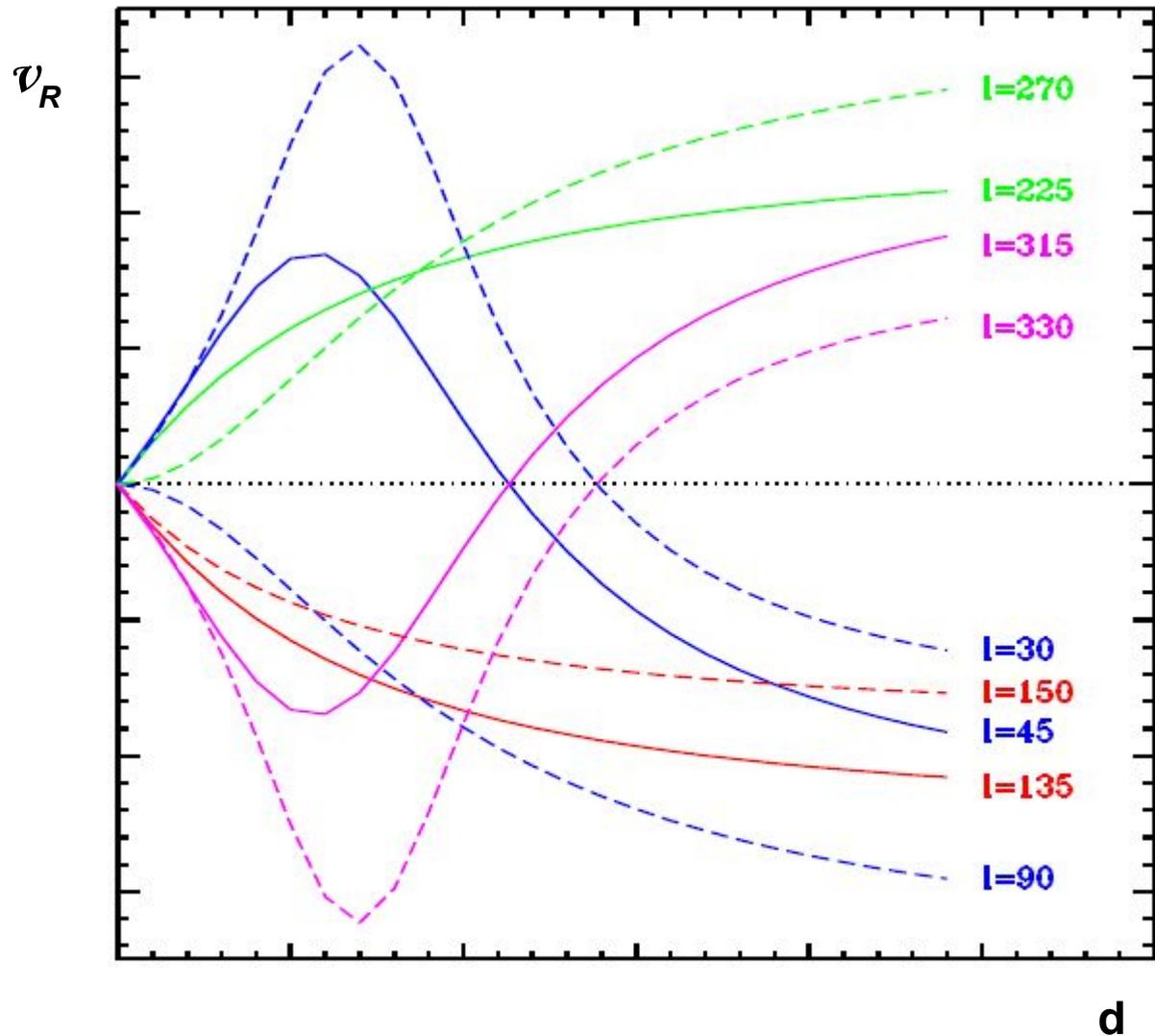


Figure 8-8. Geometric relationships among  $R_0$ ,  $l$ , and  $R_{\min}$ .

Ejemplos de curvas de velocidad radial en función de la distancia al Sol  $d$ , para distintas longitudes galácticas



# Cálculo de la velocidad radial y tangencial en la vecindad solar: constantes de Oort

$d \ll R_{\odot}$  (y  $d \ll R$ ).

Se desarrolla en serie  $\omega$  en los alrededores de  $R_{\odot}$ :

$$\omega(R) = \omega_{\odot} + \left( \frac{d\omega}{dR} \right)_{R_{\odot}} (R - R_{\odot}) \quad (2)$$

y de  $R^2 = R_{\odot}^2 + d^2 - 2 R_{\odot} d \cos l$

haciendo  $x = \frac{d}{R_{\odot}}$ , se desarrolla  $R$  alrededor de  $x = 0$ :

$$R = R_{\odot} \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos l} \Rightarrow \frac{dR}{dx} = \frac{R_{\odot} (x - \cos l)}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos l}}$$

$$\rightarrow \left. \frac{dR}{dx} \right|_{x=0} = -R_{\odot} \cos l$$

con lo que:

$$R \simeq R|_{x=0} + \left. \frac{dR}{dx} \right|_{x=0} (x - 0) = R_{\odot} - R_{\odot} \cos l \frac{d}{R_{\odot}}$$

$$\Rightarrow R \simeq R_{\odot} - d \cos l$$

Con esto la (2) queda:

$$\omega(R) = \omega_{\odot} - \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_{\odot}} d \cos l$$

y reemplazando en (5):

$$v_r = - \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} d \cos l R_\odot \operatorname{sen} l$$
$$\Rightarrow v_r = - \frac{R_\odot}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} d \operatorname{sen}(2l)$$

Similar con (11):

$$v_T = - \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} d \cos l R_\odot \cos l - \omega_\odot d + \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} d^2 \cos l$$

despreciando el término con  $d^2$  y reemplazando  $\cos^2 l = \frac{1+\cos(2l)}{2}$ :

$$v_T = - \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} d R_\odot \left( \frac{1 + \cos(2l)}{2} \right) - \omega_\odot d$$
$$\Rightarrow v_T = \left[ - \frac{R_\odot}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} - \omega_\odot \right] d - \frac{R_\odot}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} d \cos(2l)$$

Se definen las *constantes de Oort* (1927):

$$A = - \frac{R_\odot}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot}$$
$$B = - \frac{R_\odot}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} - \omega_\odot$$

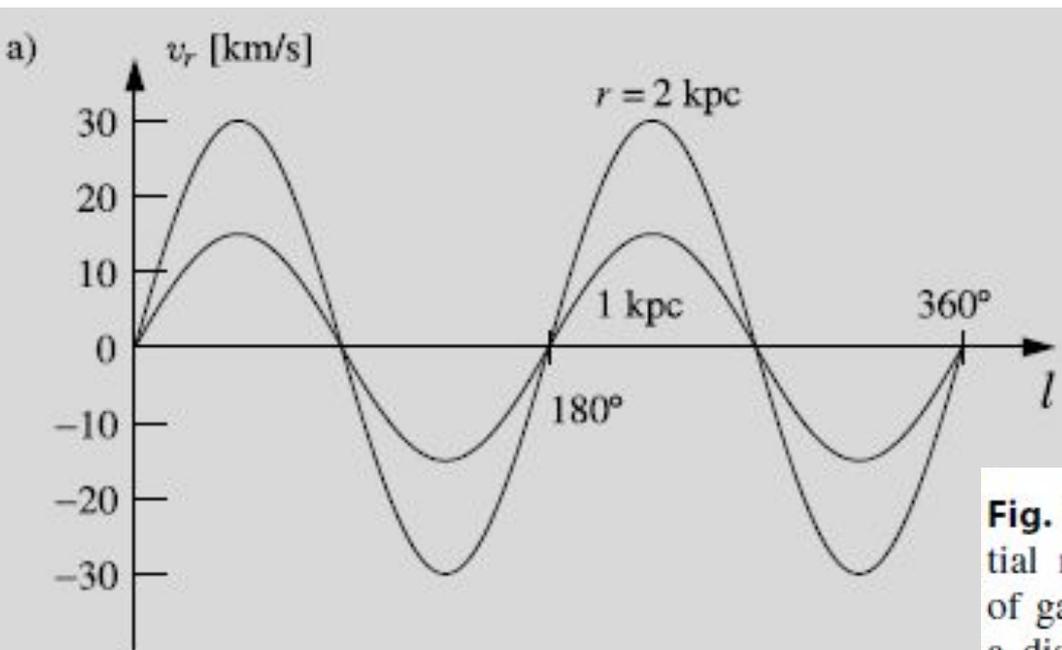
$$v_r = A d \operatorname{sen}(2l)$$
$$v_T = A d \cos(2l) + B d$$

$$\begin{aligned}
 [v_r], [v_T] &= \text{km s}^{-1} \\
 [d] &= \text{kpc} \\
 [A], [B] &= \frac{\text{km}}{\text{s kpc}}
 \end{aligned}$$

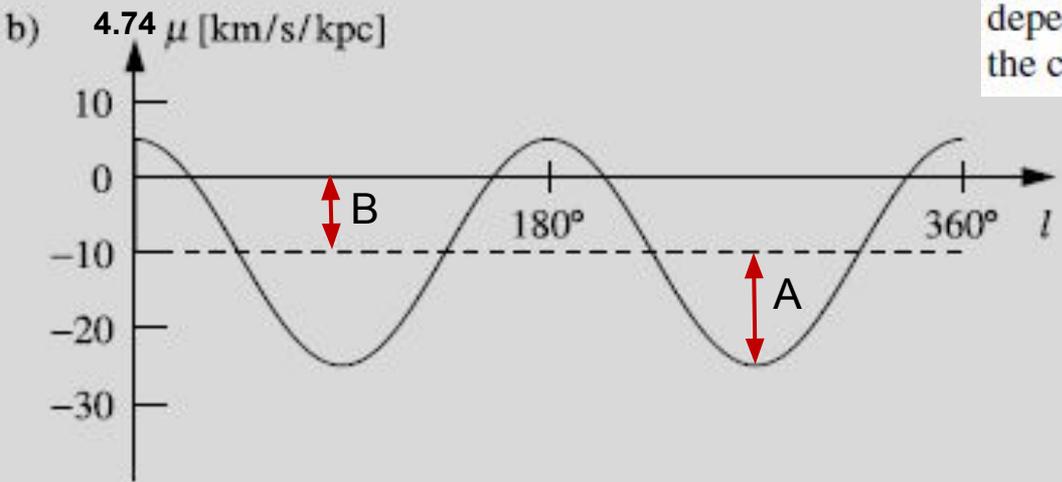
In terms of proper motions, we know from equation (3-2) that  $\mu = v_T/4.74d$ , where  $\mu$  is expressed in seconds of arc per year,  $v_T$  in kilometers per second, and  $d$  in parsecs. Thus, if  $\mu_\ell$  is the proper motion in seconds of arc per year measured positive in the direction of increasing  $\ell$ , then

$$\mu_\ell = \frac{A \cos 2\ell + B}{4.74} \tag{8-21}$$

In equation (8-21), both  $A$  and  $B$  have to be expressed in kilometers per second per parsec. The numerical values of the two constants in these units are a factor of  $10^3$  smaller than the values quoted later in this chapter, which are given in the customary units of kilometers per second per kiloparsec.



amplitud =  $A_d$



**Fig. 18.15** The velocity components due to differential rotation according to Oort's formulas as functions of galactic longitude. (a) Radial velocities for objects at a distance of 1 and 2 kpc. (Compare with Fig. 18.13.) Strictly, the longitude at which the radial velocity vanishes depends on the distance. Oort's formulas are valid only in the close vicinity of the Sun. (b) Proper motions

Equations (8-16) and (8-21) were obtained in 1927 by Oort (**O1**), who immediately showed that they were consistent with observation. He thereby demonstrated unequivocally the existence of differential galactic rotation, and he provided compelling evidence for the basic correctness of the Lindblad-Oort model of galactic rotation.

It is obvious from equations (8-15) and (8-19) that the local values of the angular rotation rate and the derivative ( $d\Theta/dR$ ) can be expressed directly in terms of the Oort  $A$  and  $B$  constants. We obtain

$$\omega_0 = \frac{\Theta_0}{R_0} = A - B \quad (8-22)$$

and

$$(d\Theta/dR)_{R_0} = -(A + B) \quad (8-23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{R_0}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_0} \\ B = -\frac{R_0}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_0} - \omega_0 \end{array} \right.$$

La pendiente de la curva de rotación es:

$$\left. \frac{d\Theta}{dR} \right|_{R=R_\odot} = \left. \frac{d(\omega R)}{dR} \right|_{R=R_\odot} = \omega_\odot + R_\odot \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_\odot} = -(A + B)$$

We shall use these two equations repeatedly in later work; students may even find it worthwhile to memorize these results.

Because the  $A$  and  $B$  constants provide an essentially complete *local* description of the kinematics of galactic rotation, and specifically because they can be used to evaluate  $\omega_0$  and  $(d\Theta/dR)_{R_0}$ , a considerable effort has been devoted to the determination of their numerical values. It is clear that the constant  $A$  can be derived from an analysis of radial velocity data for stars of known distances. In principle, both  $A$  and  $B$  can be inferred from proper-motion data, and, as can be seen from equation (8-21), the results thus obtained are independent of a distance scale. The latter is an important advantage because in many cases stellar distances are not known accurately. In practice, however, the observable effects are small [ $\mu_\ell \approx (0.003 \cos 2\ell - 0.002)$  per year], and the proper-motion data available at present may contain systematic errors (see Chapter 2). A variety of different techniques have been developed and employed to infer the rotation constants, and, as we shall see in §8-2, one can develop a consistent set of values for the four parameters  $A$ ,  $B$ ,  $R_0$ , and  $\Theta_0$  by invoking certain theoretical relationships among them and by combining several different kinds of observational data.

❖ Valores *aproximados*: Si  $R_0 = 8$  kpc,  $A \sim +15$  km/s kpc y  $B \sim -12$  km/s kpc

⇒

$$\Theta_0 = 216 \text{ km/s} , \omega_0 = 27 \text{ km/s kpc} \quad (P \sim 2 \times 10^8 \text{ años}) \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\Theta}{dR} \right]_{R_0} \sim -3 \text{ km/s kpc}$$

## Ejemplos de determinación de los parámetros de rotación:

❖ Bobylev et al 2016 (refieren como  $\Omega_0$  a la vel angular  $\omega_0$ , y como  $V_0$  a la vel lineal  $\Theta_0$ )

Abstract—We consider stars with radial velocities, proper motions, and distance estimates from the RAVE4 catalogue. Based on a sample of more than 145 000 stars at distances  $r < 0.5$  kpc, we have found the following kinematic parameters:  $(U, V, W)_\odot = (9.12, 20.80, 7.66) \pm (0.10, 0.10, 0.08) \text{ km s}^{-1}$ ,  $\Omega_0 = 28.71 \pm 0.63 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , and  $\Omega'_0 = -4.28 \pm 0.11 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-2}$ . This gives the linear rotation velocity  $V_0 = 230 \pm 12 \text{ km s}^{-1}$  (for the adopted  $R_0 = 8.0 \pm 0.4 \text{ kpc}$ ) and the Oort constants  $A = 17.12 \pm 0.45 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  and  $B = -11.60 \pm 0.77 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ .

$A,$ $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$	$B,$ $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$	$\Omega_0 = A - B,$ $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$	$V_0,$ $\text{km s}^{-1}$	Ref	Sample
$16.8 \pm 0.6$	—	—	—	(1)	Line-of-sight vel. of OB stars
$14.4 \pm 1.2$	$-12.0 \pm 2.8$	$26.4 \pm 3.0$	$211 \pm 24$	(2)	Various stars
$12.9 \pm 0.7$	$-16.9 \pm 1.1$	$29.8 \pm 1.3$	$238 \pm 11$	(3)	OB stars
$14.8 \pm 0.8$	$-12.4 \pm 0.8$	$27.2 \pm 1.1$	$218 \pm 9$	(4)	Cepheids, Hipparcos
$13.0 \pm 0.7$	$-12.1 \pm 0.7$	$25.1 \pm 1.0$	$201 \pm 9$	(5)	Distant OB stars, Hipparcos
$15.9 \pm 2$	$-16.9 \pm 2$	$32.8 \pm 2.8$	$262 \pm 23$	(6)	Red giants, ACT/Tycho-2
$15.3 \pm 0.4$	$-11.9 \pm 0.4$	$27.2 \pm 0.6$	$218 \pm 6$	(7)	Main sequence, Gaia DR1
$15.1 \pm 0.1$	$-13.4 \pm 0.1$	$28.5 \pm 0.1$	$228 \pm 4$	(8)	Main sequence, Gaia DR2

(1) Balona and Feast (1973); (2) Kerr and Lynden-Bell (1986); (3) Comeron et al. (1994); (4) Feast and Whitelock (1997); (5) Torra et al. (2000); (6) Olling and Dehnen (2003); (7) Bovy et al. (2017); (8) Li et al. (2019).

## Ejemplos de determinación de los parámetros de rotación (cont.):

[ *RAVE Survey*: Radial Velocity Experiment (Leibniz-Institute for Astrophysics Potsdam)

is a magnitude-limited ( $9 < I < 12$ ) spectroscopic survey of Galactic stars randomly selected in the southern hemisphere. ]

### ❖ Krisanova et al. 2020

(refieren como  $\Omega_0$  a la vel angular  $\omega_0$ , y como  $V_0$  a la vel lineal  $\Theta_0$ ):

**Abstract**—We have studied a sample of more than 25 000 young stars with proper motions and trigonometric parallaxes from the Gaia DR2 catalogue. The relative errors of their parallaxes do not exceed 10%. The selection of stars belonging to active star-forming regions was made by Marton et al. based on data from the Gaia DR2 catalogue by invoking infrared measurements from the WISE and Planck catalogues. Low-mass T Tauri stars constitute the majority of sample stars. The following parameters of the angular velocity of Galactic rotation have been found from them:  $\Omega_0 = 28.40 \pm 0.11 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ ,  $\Omega'_0 = -3.933 \pm 0.033 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-2}$  and  $\Omega''_0 = 0.804 \pm 0.040 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-3}$ . The Oort constants are  $A = 15.73 \pm 0.32 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  and  $B = -12.67 \pm 0.34 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , while the circular rotation velocity of the solar neighborhood around the Galactic center is  $V_0 = 227 \pm 4 \text{ km s}^{-1}$  for the adopted Galactocentric distance of the Sun  $R_0 = 8.0 \pm 0.15 \text{ kpc}$ .

## Repaso: Hidrógeno neutro

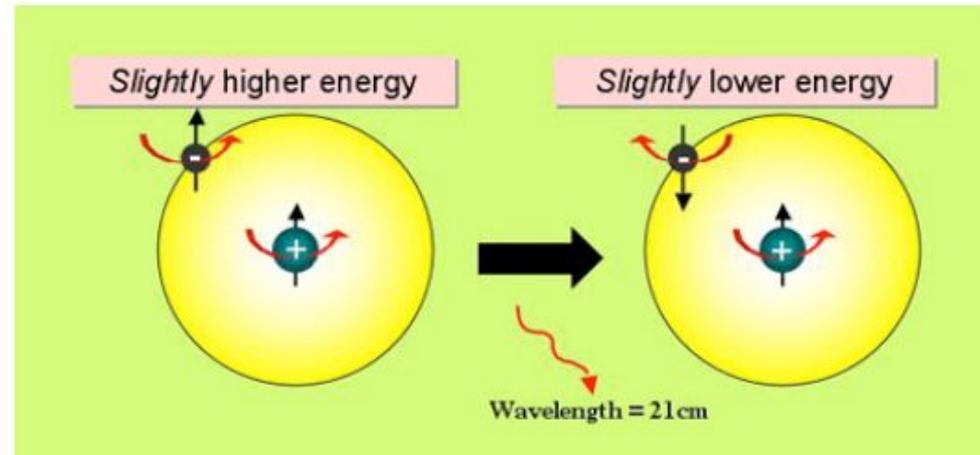
Hydrogen is the most abundant element in the Universe and in the interstellar medium (ISM) of the Milky Way.

The cold interstellar gas does not emit radiation at visible wavelength, but at radio wavelengths due to a hyperfine line from two closely spaced energy levels in the ground state of the neutral H atom (HI). An HI atom with the spins aligned will spontaneously flip back to the lower energy, non-aligned, state after sometime.

hyperfine transitions are a consequence of coupling between nuclear spin and the magnetic field generated by the orbiting electron.

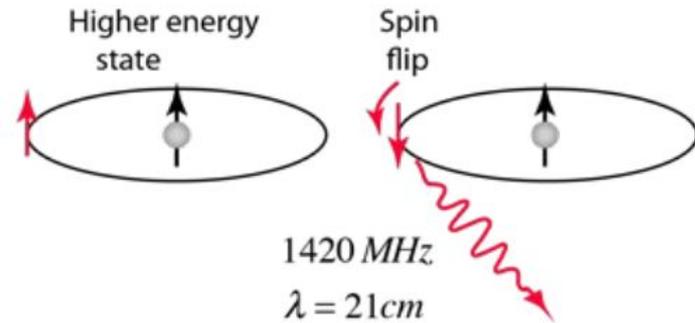
The frequency of the center of this line is defined from quantum mechanics:

1420.406 MHz



This frequency corresponds to a wavelength,  $\lambda \approx 21$  cm and therefore this line is often called “the 21-cm line”

## Hidrógeno neutro - línea de 21 cm

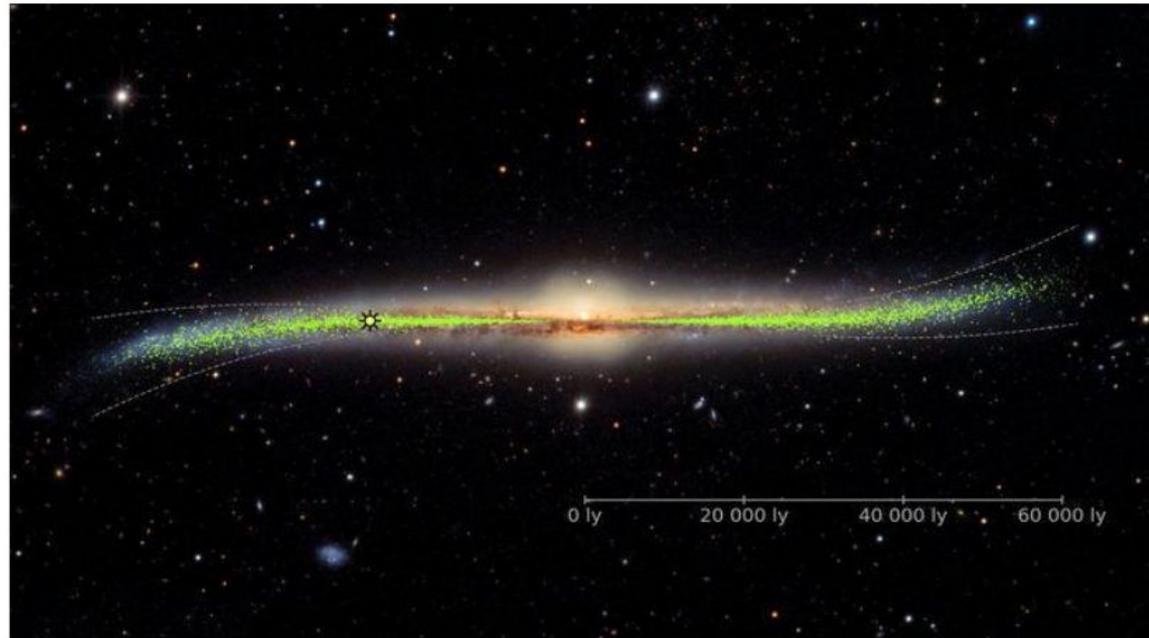


### Transición prohibida

La tasa de desexcitación colisional es muy baja. Se desexcita por radiación.

Disco galáctico que se ensancha y se retuerce. Se estudió a través del HI.

La **interacción** entre los espines del  $e^-$  y del  $p^+$  divide al nivel fundamental del átomo de H en 2 niveles de *estructura hiperfina*.



<https://www.fuw.edu.pl/press-release/news5998.html>

# Determinación observacional de la curva de rotación

□ si  $R < R_0$  : con observaciones de HI

Vimos previamente que a través de las constantes de Oort podemos caracterizar la rotación en los alrededores del Sol, esto es el valor de la velocidad de rotación  $\Theta_0$  y de la pendiente de la curva de rotación  $\left. \frac{d\Theta}{dR} \right|_{R_0}$ . Sin embargo, si nuestro interés es conocer la rotación *en toda la Galaxia*, es necesario estudiar la cinemática de objetos del disco que toman parte en la rotación en amplias zonas de la Galaxia. Y para tales casos la absorción interestelar es un inconveniente en el óptico.

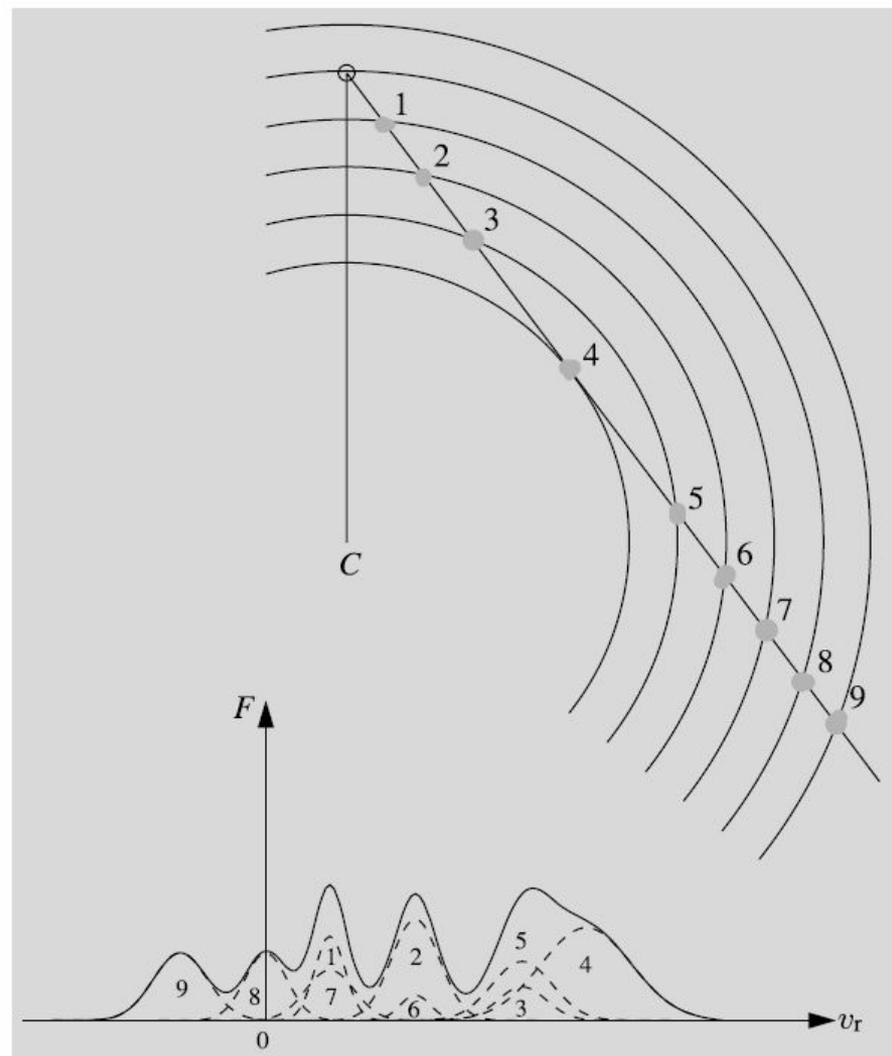
Un aporte importante en este sentido, es el estudio del HI que tiene varias ventajas: es muy abundante en la Vía Láctea, se distribuye con fuerte concentración hacia el plano, y emite en radio en la línea de  $\lambda = 21 \text{ cm}$  que no se ve afectada por la extinción interestelar.

Para construir la curva de rotación necesitamos **pares de valores (R,  $\Theta$ )**.

Cuando se estudia el HI en una dada dirección (una dada longitud galáctica  $\ell$ ) dentro del círculo solar (círculo de radio  $R_0$  y centro en el CG), lo que se observa es la emisión del HI a lo largo de esa visual, que observamos como un perfil que da la densidad de flujo en 21 cm con respecto a la velocidad radial. Así podemos suponer que el HI está formado por una sucesión de “nubes” a distintas distancias, que siguen la rotación por lo que cada una de ellas posee una velocidades radiales reflejo de tal rotación, y que además poseen una

dispersión de velocidades interna, al azar, que hace que cada nube pueda interpretarse como una Gaussiana. En la figura se observa cómo se interpreta el perfil de HI. Notar que la Gaussiana en velocidad radial  $v_r = 0$  corresponde a la suma de las contribuciones del HI en los alrededores del Sol más el punto 8, ambos a una distancia  $R_0$  del CG, mientras que el punto 9 está a  $R > R_0$  y la proyección de su velocidad de rotación en la dirección de la visual da una  $v_r < 0$ .

A partir de cada perfil de la línea de HI en cada longitud  $\ell$ , sólo podremos obtener un punto para la curva de rotación, pues necesitamos conocer la distancia para calcular  $R$ , y solo la conocemos para la nube ubicada en el punto subcentral (no para las restantes).



**Fig. 18.18** Clouds at different distances have different velocities and therefore give rise to emission lines with different Doppler shifts. The observed flux density profile (*continuous curve*) is the sum of the line profiles of all the individual line profiles (*dashed curves*). The numbers of the line profiles correspond to the clouds in the upper picture

## Hipótesis:

- suponiendo que las nubes de HI se mueven en órbitas estrictamente circulares en el plano y alrededor del CG, entonces vale

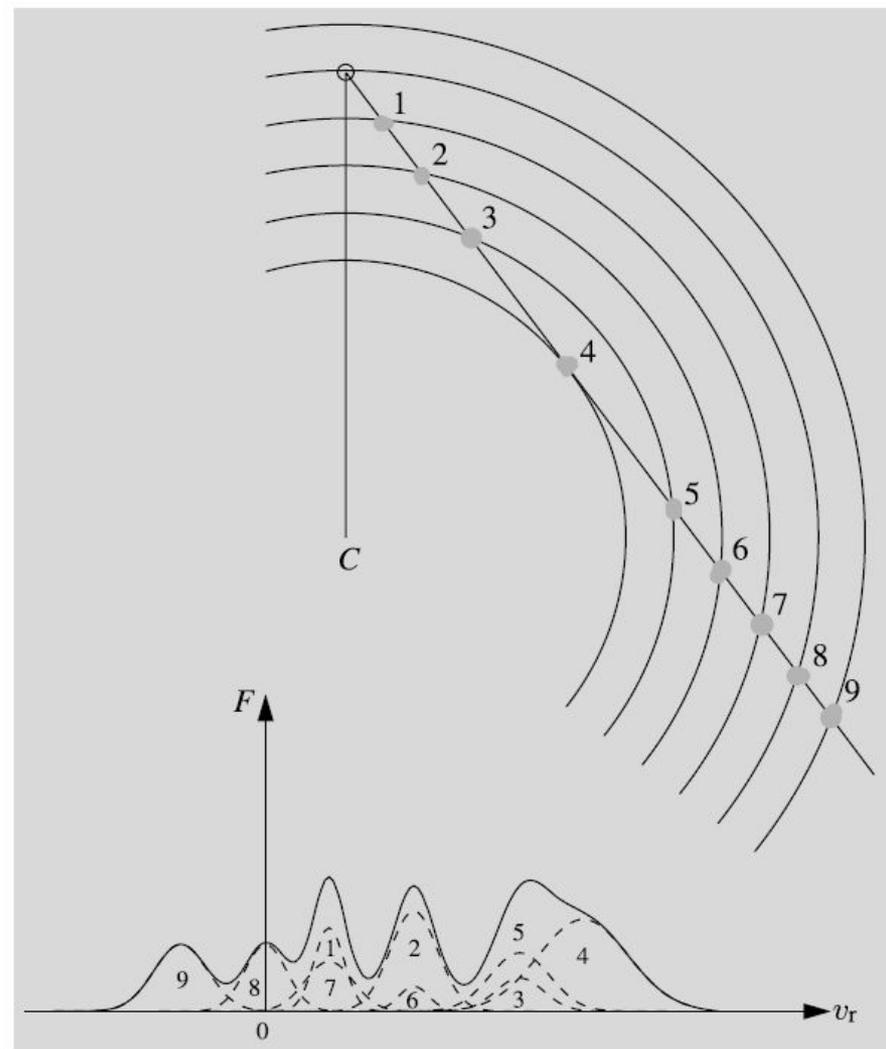
$$v_R = (\omega - \omega_0) R_0 \text{sen } l$$

entonces, midiendo la velocidad radial y conociendo la longitud galáctica  $l$  en que se observa,  $R_0$  y  $\omega_0$  se puede calcular la velocidad angular  $\omega = \omega(R)$ . Pero para agregar un punto en la curva de rotación necesitamos también  $R$ , para lo cual necesitamos conocer la distancia  $d$  a la nube en cuestión. Dado que se supone que  $\omega(R)$  es una función decreciente con  $R$ , entonces:

- para  $0^\circ < l < 90^\circ$  la velocidad radial es máxima en el punto subcentral, y
- para  $270^\circ < l < 360^\circ$  la velocidad radial es mínima en el punto subcentral

donde  $R = R_{\text{mín}} = R_0 \text{sen } l$

(o  $-R_0 \text{sen } l$ , si  $l$  es del IV cuadrante)



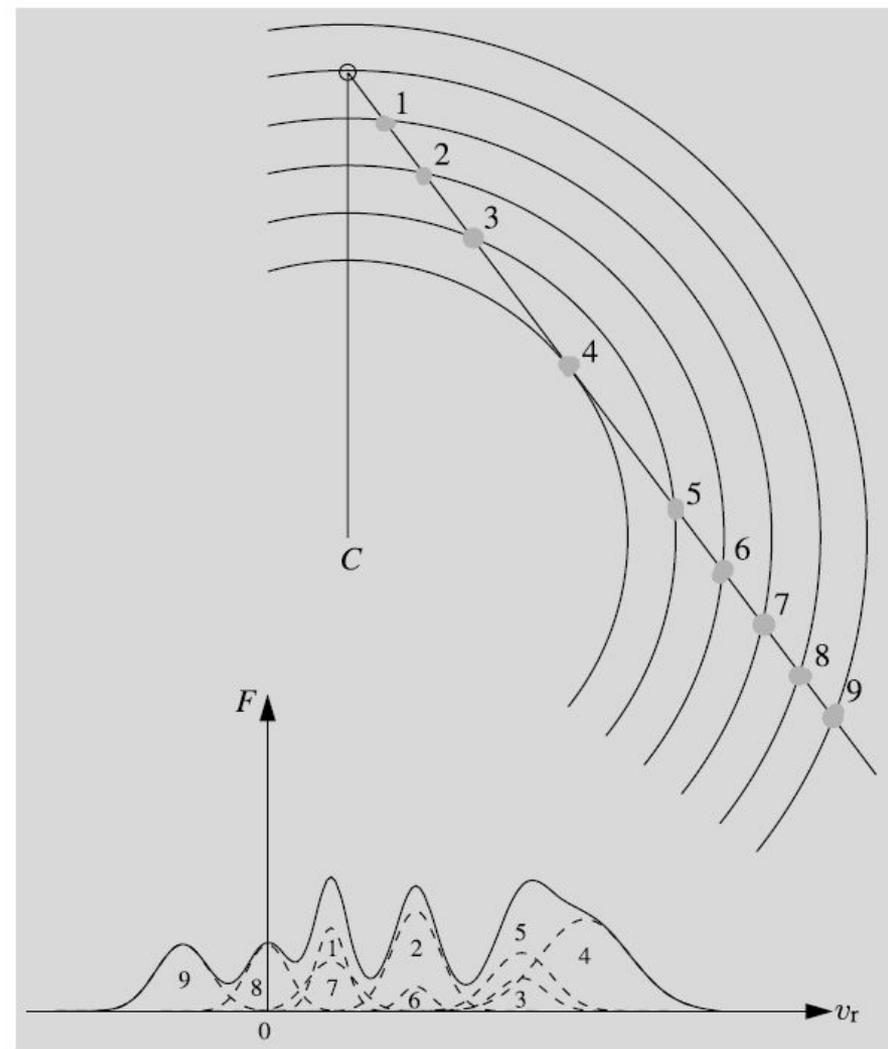
**Fig. 18.18** Clouds at different distances have different velocities and therefore give rise to emission lines with different Doppler shifts. The observed flux density profile (continuous curve) is the sum of the line profiles of all the individual line profiles (dashed curves). The numbers of the line profiles correspond to the clouds in the upper picture

Así, se mide los *valores extremos de la velocidad radial* (máximo o mínimo según el cuadrante), que corresponde a la Gaussiana que se ajusta en el límite positivo o negativo del perfil de HI, y luego se calculan  **$R$  y  $\omega$**  con las ecuaciones anteriores. Tenemos entonces un punto de la curva de rotación.

Este método *no sirve para el II y III cuadrantes* pues la geometría hace que no haya punto subcentral. Tampoco fuera del círculo solar, ni para valores de longitud muy cercanos a  $0^\circ$  pues cerca del centro Galáctico los movimientos dejan de ser estrictamente circulares.

*Otros problemas de este método:* que no exista HI justo en el punto subcentral, o que éste presente movimientos al azar.

Luego veremos cómo se completa la curva de rotación para  $R$  fuera del círculo solar.



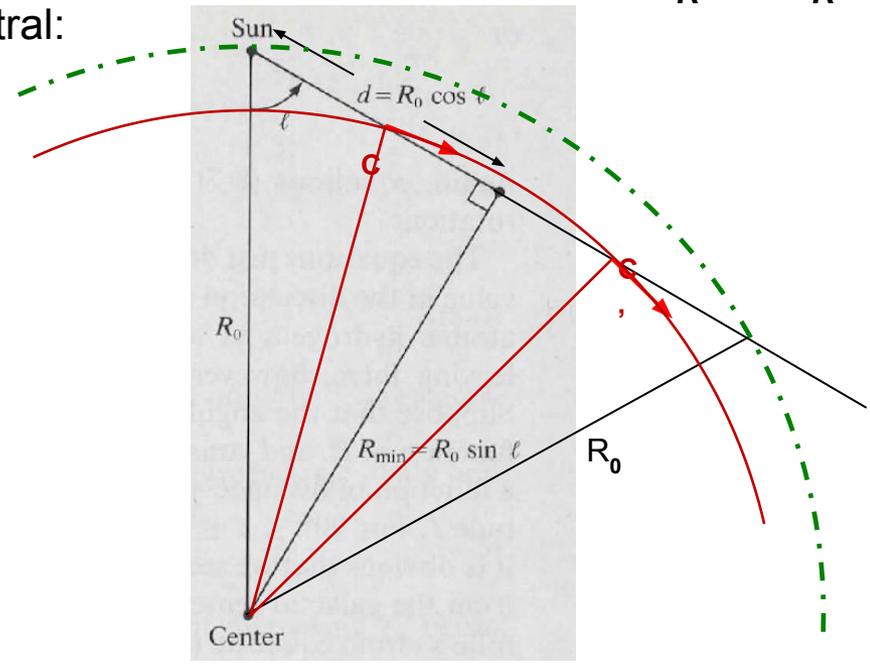
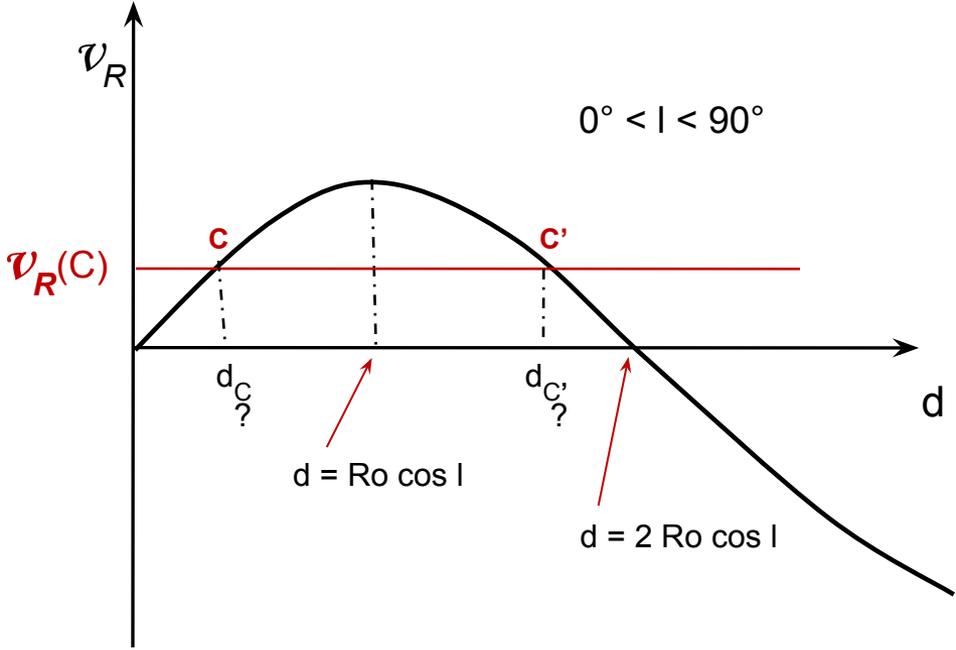
**Fig. 18.18** Clouds at different distances have different velocities and therefore give rise to emission lines with different Doppler shifts. The observed flux density profile (*continuous curve*) is the sum of the line profiles of all the individual line profiles (*dashed curves*). The numbers of the line profiles correspond to the clouds in the upper picture

# Distancias cinemáticas:

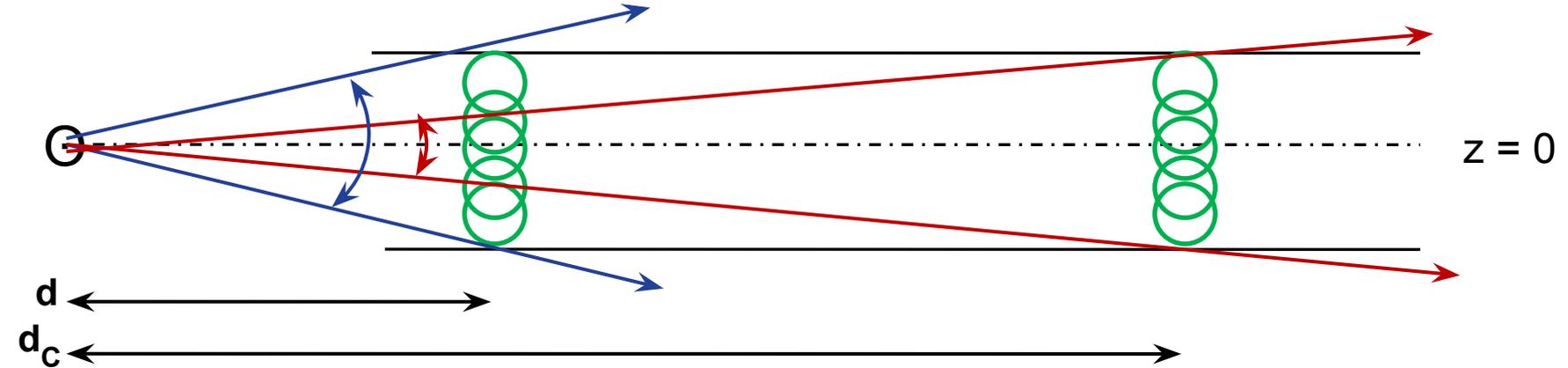
Sabemos que las observaciones en radio tienen la ventaja de *no ser afectadas por la absorción*. En radioastronomía es posible determinar la distancia a una radiofuente midiendo su velocidad radial, *asumiendo que toma parte en la rotación Galáctica* (rotación circular pura). Así, teniendo *la velocidad radial y la longitud galáctica* de la fuente en cuestión, y *conociendo la curva de rotación*, de:  $v_r = R_0(\omega - \omega_0) \sin l$

podemos despejar la vel angular  $\omega(R)$ . Mediante la curva de rotación obtenemos la distancia galactocéntrica  $R$ , y finalmente  $d$ .

El problema que se puede presentar es que dentro del círculo solar habrá una ambigüedad en la determinación de distancia, pues *hay dos  $d$  a las que les corresponde igual vel. radial*:  $v_R(C) = v_R(C')$  pues C y C' son simétricos respecto al punto subcentral:



Una opción para resolver esa ambigüedad es *considerar el espesor de la capa de HI*, asumiendo que es *constante*:



se puede definir la distancia según la extensión angular de las “nubes de HI” (en verde), a pequeñas latitudes galácticas, que posean la misma vel radial.

[ En general, se considera que el espesor de HI sigue un modelo sobre la extensión vertical (en  $z$ ) considerando la física de estrellas y gas.]

Si la radiofuente en estudio está fuera del círculo solar, no hay ambigüedades en la determinación de su distancia cinemática.

□ si  $R > R_0$

Fuera del círculo solar es imprescindible conocer *la distancia  $d$  al objeto* en estudio en el disco, pues con  $d$  se calcula la distancia galactocéntrica  $R$  mediante el teorema del coseno:

$$R = \sqrt{R_0^2 + d^2 - 2dR_0 \cos l}$$

y si se mide la veloc radial, se puede calcular  $\omega$  con:

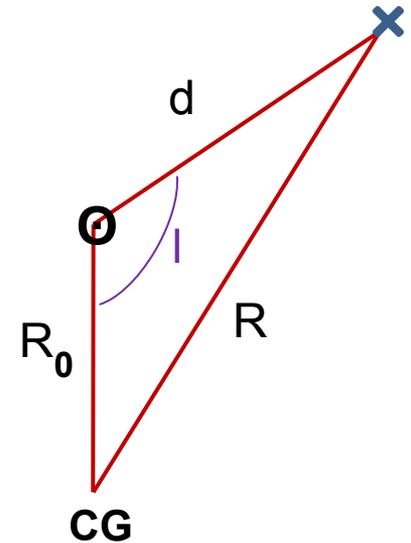
$$v_r = R_0(\omega - \omega_0) \sin l$$

y se puede extender la curva de rotación hasta mayores valores de  $R$ .

¿Qué objetos pueden utilizarse, de los cuales se pueda conocer su  $d$ ?

- **Regiones HII gigantes**: asociadas a **estrellas jóvenes** (las OB son excitatrices de regiones HII, se obtienen sus  $d$  por fotometría) y a **nubes moleculares** (se mide la velocidad radial en base, por ejemplo, a las líneas de emisión del CO en 1.3 mm y 2.6 mm).

**Aclaración**: H<sub>2</sub> es la molécula más abundante en el Universo, pero es difícil de observar pues no emite en radio. Se observa en cambio el CO, que es la segunda más abundante, y que es trazador del H<sub>2</sub>.



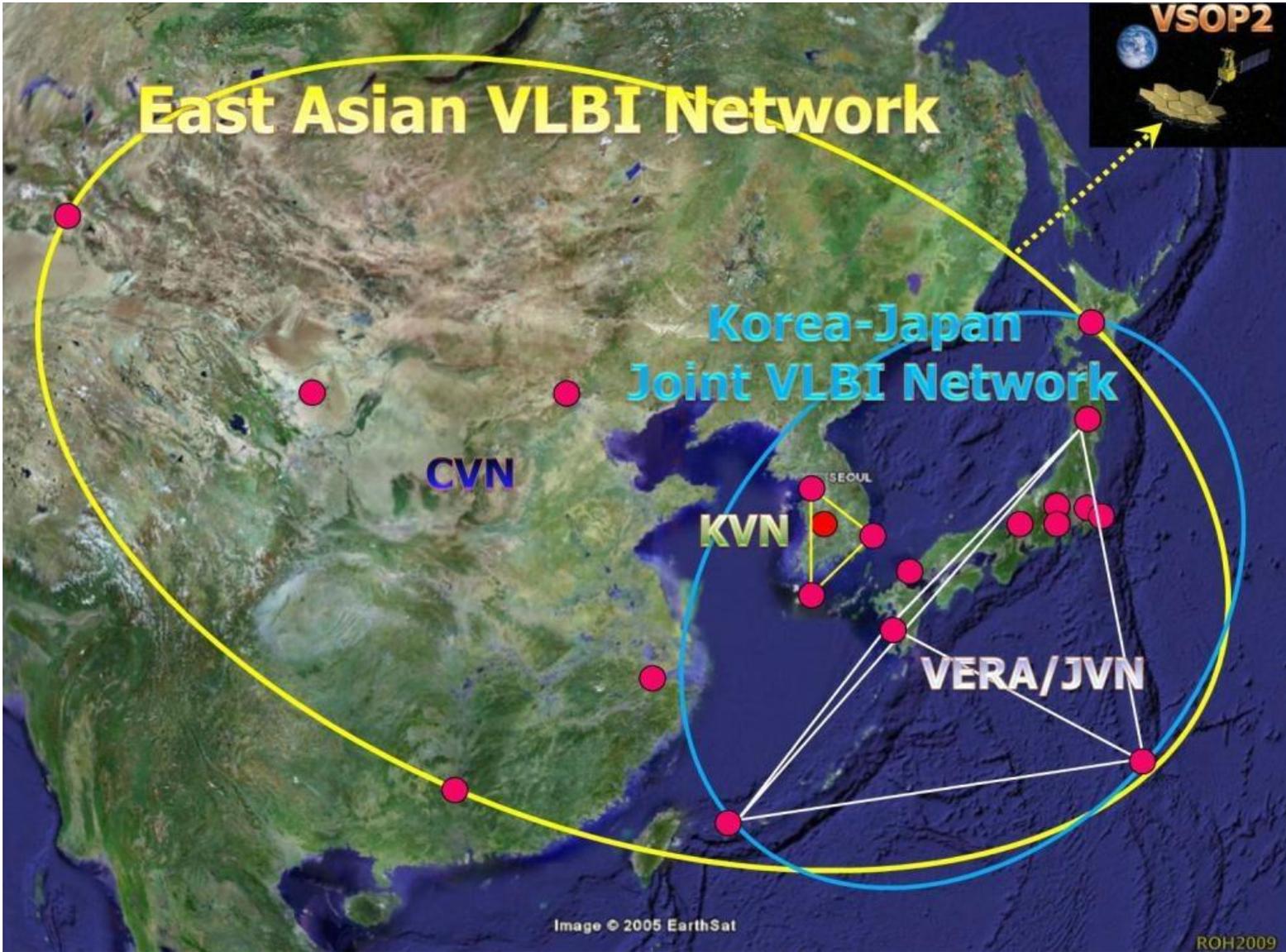
## □ Otras fuentes utilizadas para determinar la curva de rotación

- ***Masers asociados a estrellas jóvenes y masivas en regiones de formación estelar.***

Se miden paralajes y movimientos propios de precisión con VLBI (interferometría de línea de base muy larga), que no son afectadas por extinción. Teniendo además sus posiciones y velocidades radiales, se cuenta con toda la información necesaria.

Líneas de masers:  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{SiO}$  (monóxido de silicio),  $\text{OH}$  (hidroxilo),  $\text{CH}_3\text{OH}$  (metanol).

Principales fuentes de VLBI: VERA (Japanese VLBI Exploration of Radio Astrometry)  
EVN (European VLBI Network)  
VLBA (Very Long Baseline Array)



# EVN (European VLBI Network)



# NASA VLBI Network

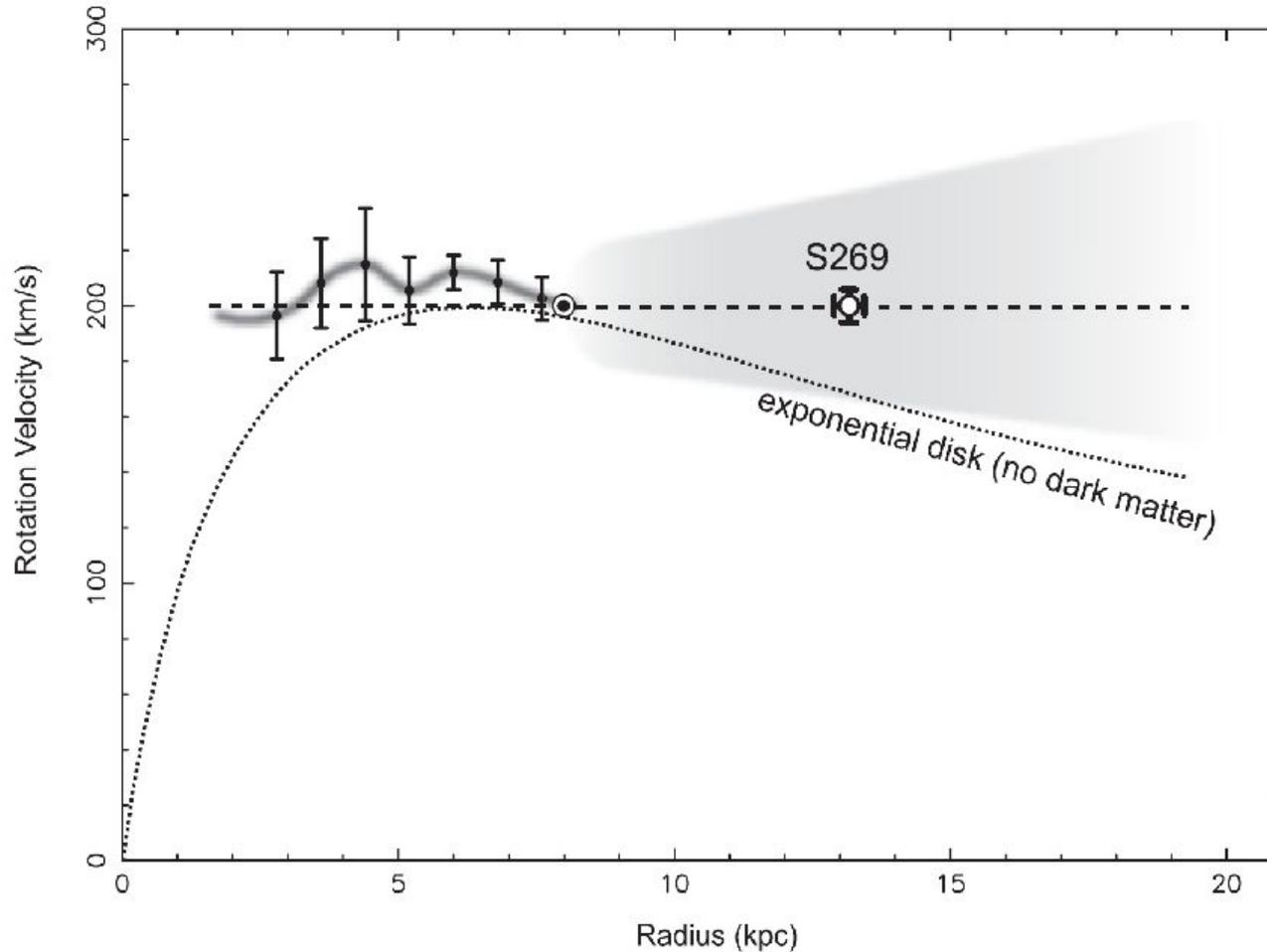


## □ Determinaciones de la curva de rotación

Principal resultado: al considerar valores de  $R$  crecientes, **la curva de rotación es plana y no se observa el comportamiento esperado** (por ejemplo) **para el caso kepleriano**, o sea, no se observa esta dependencia:

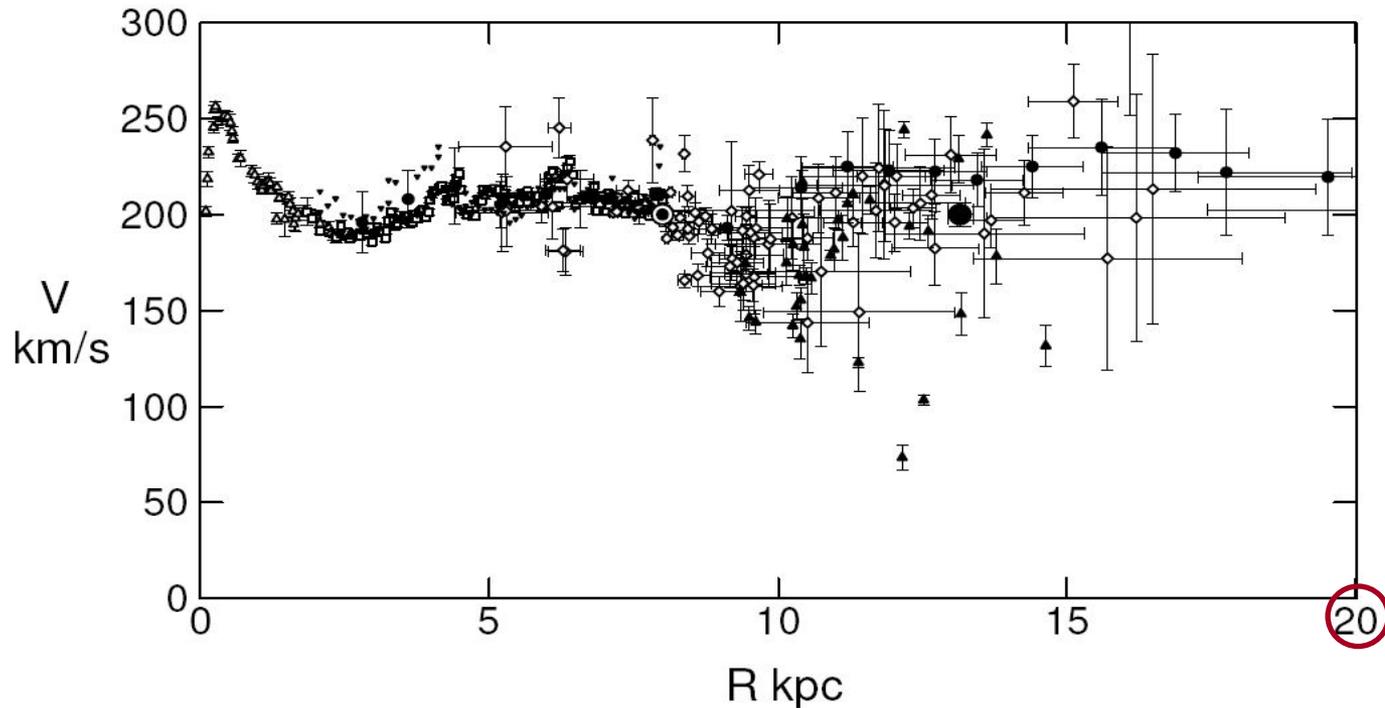
$$V \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$$

# Curva de rotación de la Vía Láctea



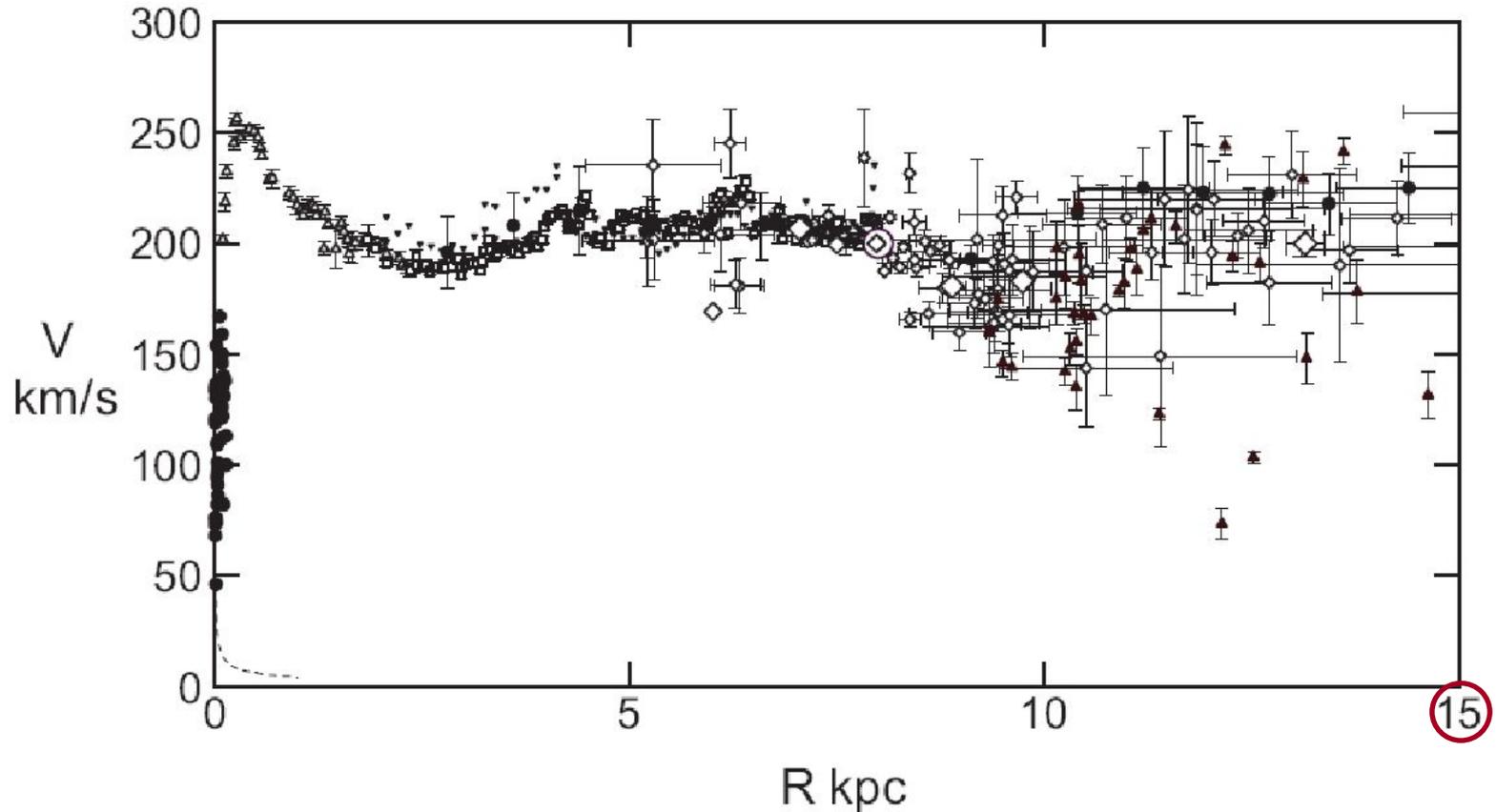
**Fig. 4.** Rotation curve of the Milky Way Galaxy obtained in previous studies together with our result for S269 using Galactic constants of  $R_0 = 8$  kpc and  $\Theta_0 = 200 \text{ km}^{-1}$ . The dashed line is the flat rotation curve with  $\Theta = 200 \text{ km}^{-1}$ ; the shadowed area shows the possible range of outer rotation curves considered in previous studies (Honma & Sofue 1997). Points at  $R \leq 8$  kpc are inner rotation curves determined from the tangential velocities of Galactic HI gases (Honma & Sofue 1997), with a smoothed fit (thick curve). The dotted curve is the rotation curve for an exponential disk, corresponding to a constant mass-to-light ratio disk without dark matter. A discrepancy between the observed point for S269 and the exponential disk is evident, demonstrating the existence of a large amount of dark matter in the outer region of the Galaxy.

# Unified Rotation Curve of the Milky Way Galaxy



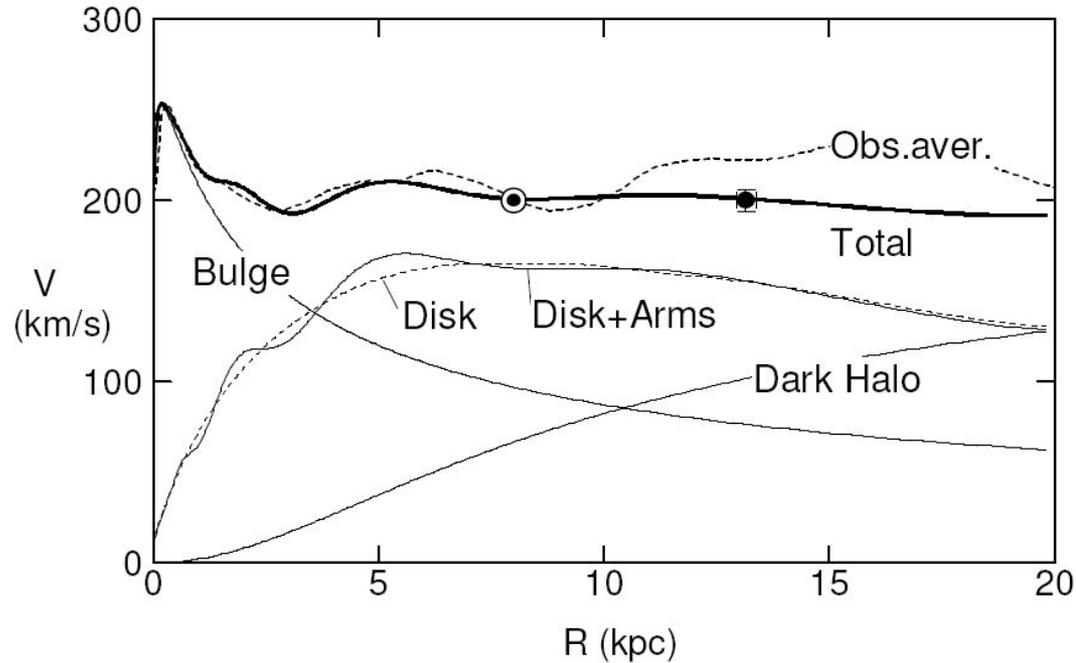
**Fig. 1.** Observed circular velocities representing the rotation curve of the Galaxy. Open triangles: HI tangent velocity method (Burton and Gordon 1978); Rectangles: CO tangent (Clemens 1989); Reverse triangles: HI tangent (Fich et al. 1989); Diamonds: CO and HII regions (Fich et al.1989, Blitz et al. 1982); filled triangles: Demers and Battinelli (2007); Circles: HI thickness (Honma and Sofue 1997a,b); Big circle at 13.1 kpc: VERA-parallax, proper motion and velocity (Honma et al. 2007). All data have been converted to  $(R_0, V_0) = (8.0, 200.0 \text{ km s}^{-1})$ . The plotted data are in table 1.

Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center — From  
Black Hole to Entire Galaxy —



Sofue et al. (2013, PASJ 65, #18): agrega la **zona central** con el radiotelescopio de Nobeyama (45 m), en CO y CS.

# Curva de rotación teórica compuesta con bulbo, disco, brazos espirales y materia oscura



**Fig. 3.** Composite rotation curve including the bulge, disk, spiral arms, and dark halo. The big dot denotes the observed result from VERA (Honma et al. 2007). The pure disk component is also indicated by the thin dashed line. The thick dashed line indicates a simply averaged observed rotation curve taken from Sofue et al. (1999) where the outer curve is based only on the HI data of Honma and Sofue (1997a).

# Fundamental Parameters of the Milky Way Galaxy Based on VLBI astrometry

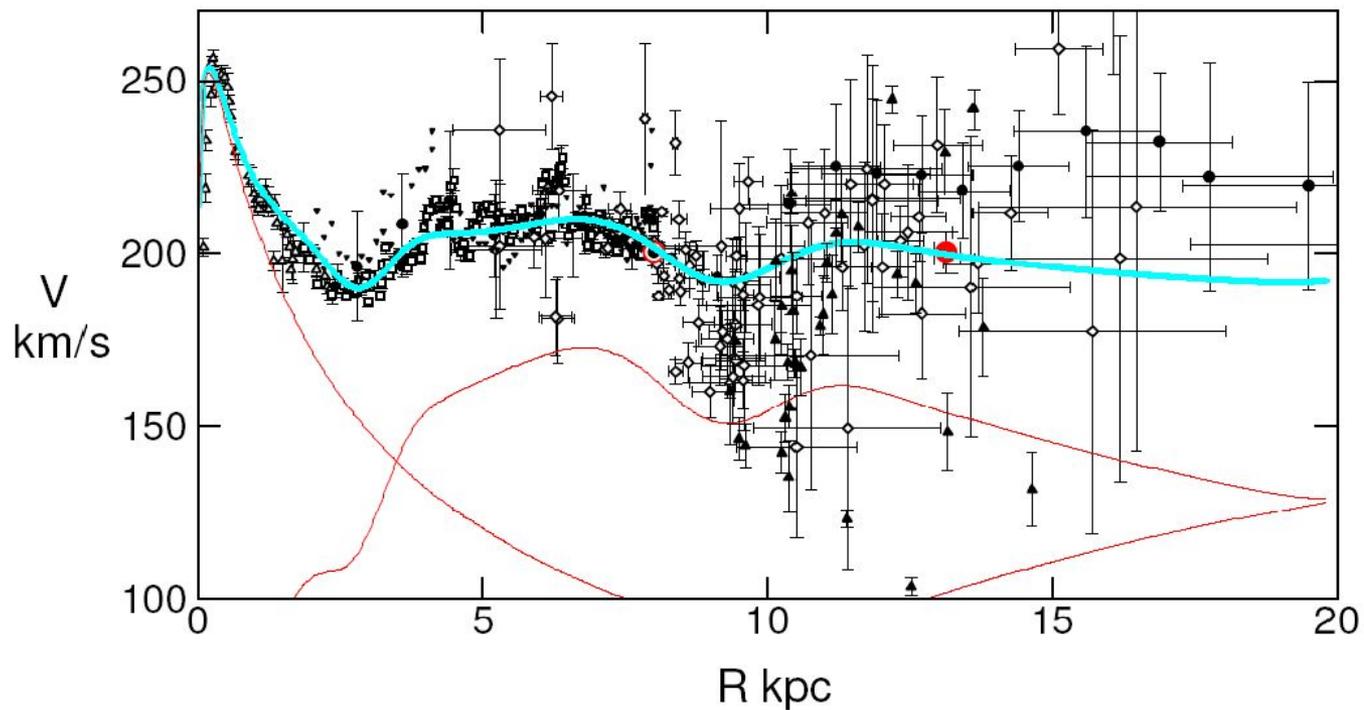
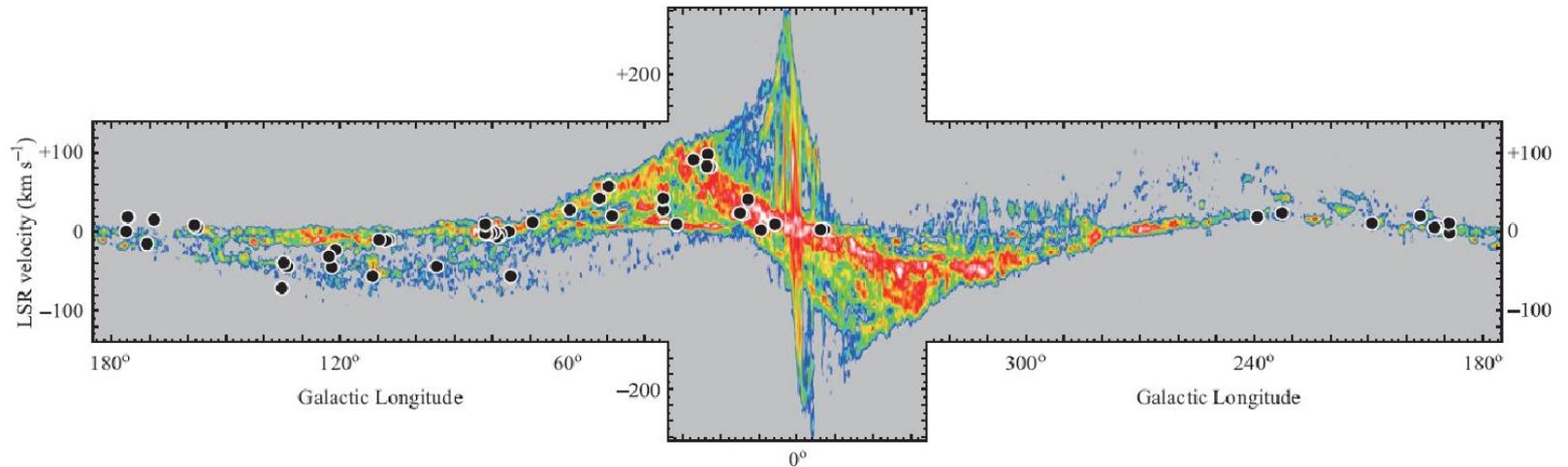


Fig. 5. Model rotation curve compared with the observations. Thin lines represent the bulge, disk + rings, and dark halo components, and the thick line is the composite rotation curve. Data are the same as in figure 1.

# Fundamental Parameters of the Milky Way Galaxy Based on VLBI astrometry

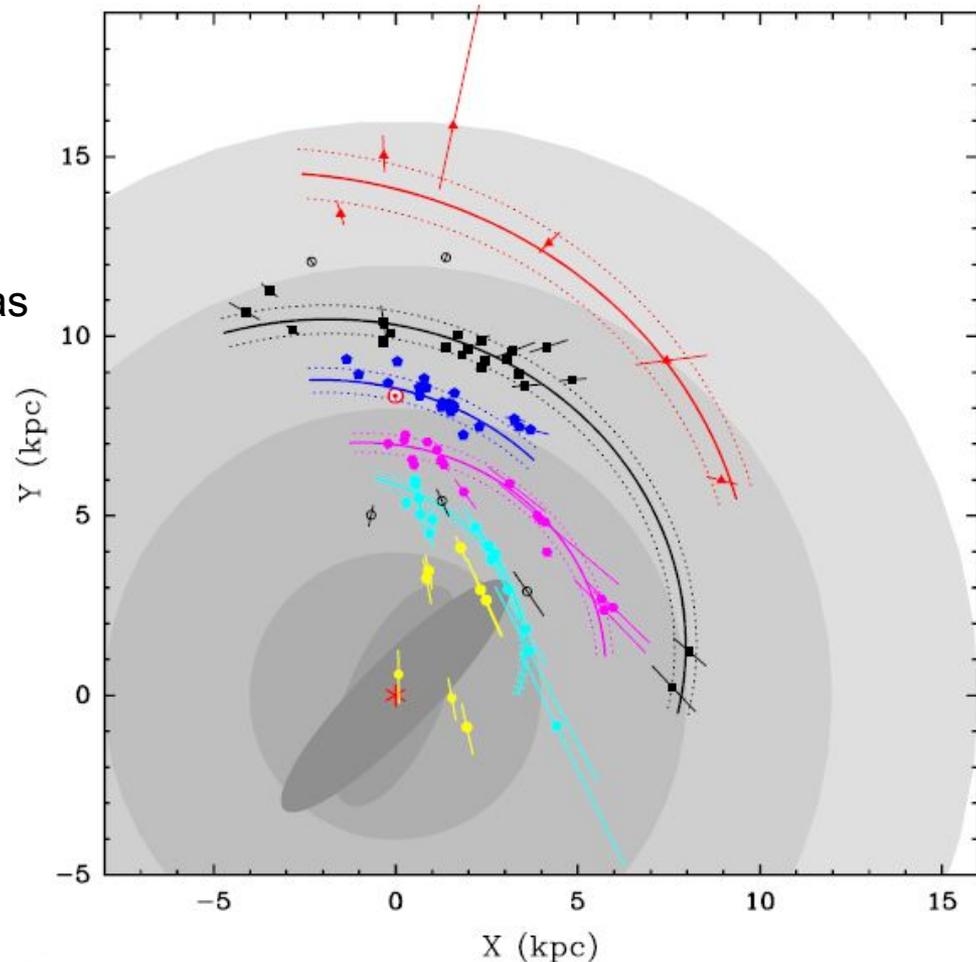


**Fig. 1.** Location of 52 maser sources for which accurate astrometric data are available (table 1), superposed on the longitude-velocity diagram of CO (Dame et al. 2001).

We present analyses to determine the fundamental parameters of the Galaxy based on VLBI astrometry of 52 Galactic maser sources obtained with VERA, VLBA and EVN.

**Diagrama LV: Longitud - Velocidad** (Honma et al. 2012, PASJ 64, #136)

Reid et al. (2014, ApJ 783, 130):  
 más de 100 paralajes trigonométricas  
 y movimientos propios de  
**masers asociados con HMSFRs**  
 (high-mass star-forming regions)



**Figure 1.** Plan view of the Milky Way showing the locations of high-mass star forming regions (HMSFRs) with trigonometric parallaxes measured by the VLBA, VERA, and the EVN. The Galactic center (red asterisk) is at (0,0) and the Sun (red Sun symbol) is at (0.8,3.4). HMSFRs were assigned to spiral arms based primarily on association with structure seen in  $\ell$ - $V$  plots of CO and H I emission (and not based on the measured parallaxes): inner Galaxy sources, yellow dots; Scutum arm, cyan octagons; Sagittarius arm, magenta hexagons; Local arm, blue pentagons; Perseus arm, black squares; Outer arm, red triangles. Open circles indicate sources for which arm assignment was unclear. Distance error bars are indicated, but many are smaller than the symbols. The background gray disks provide scale, with radii corresponding in round numbers to the Galactic bar region ( $\approx 4$  kpc), the solar circle ( $\approx 8$  kpc), co-rotation of the spiral pattern and Galactic orbits ( $\approx 12$  kpc), and the end of major star formation ( $\approx 16$  kpc). The short COBE “boxy-bar” and the “long” bar (Blitz & Spergel 1991; Hammersley et al. 2000; Benjamin 2008) are indicated with shaded ellipses. The solid curved lines trace the centers (and dotted lines the  $1\sigma$  widths) of the spiral arms from the log-periodic spiral fitting (see Section 3 and Table 2). For this view of the Milky Way from the north Galactic pole, Galactic rotation is clockwise.

we estimate the distance to the Galactic center,  $R_0$ , to be  $8.34 \pm 0.16$  kpc, a circular rotation speed at the Sun,  $\Theta_0$ , to be  $240 \pm 8$  km s $^{-1}$ , and a rotation curve that is nearly flat (i.e., a slope of  $-0.2 \pm 0.4$  km s $^{-1}$  kpc $^{-1}$ ) between Galactocentric radii of  $\approx 5$  and 16 kpc.

## La estructura espiral a partir del HI :

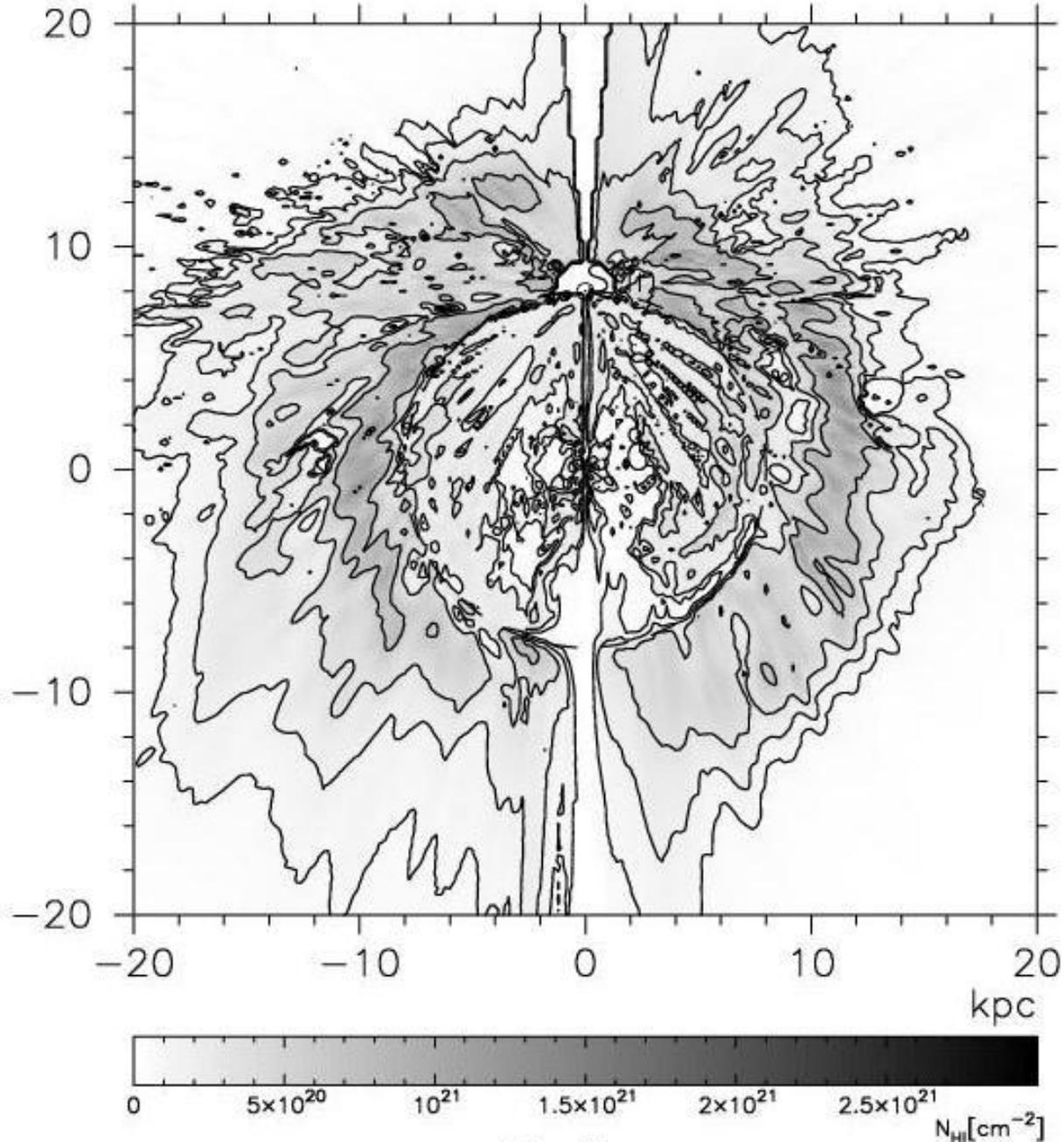
Vimos que el HI es uno de los *trazadores de la estructura espiral*. Tiene las ventajas que se observa en radio, se extiende sobre todo el disco, y es posible determinar su distancia por las distancias cinemáticas así como la cantidad de gas que puede determinarse a partir de la intensidad de la emisión en la línea de 21 cm. Así pueden construirse “**mapas de HI**” que reflejan la estructura de brazos espirales.

El inconveniente es que no será la estructura absolutamente real debido a la suposición de rotación pura implícita en las distancias cinemáticas. Hay **apartamientos de la rotación pura** (los llamados “*movimientos no circulares*”) que, aunque sean pequeños, pueden resultar en grandes cambios en la distribución espacial.

El mapa que veremos a continuación sólo *sugiere* una estructura espiral. Estudios más recientes, en vez de estudiar la densidad superficial de HI, analizan las *perturbaciones* en la densidad con respecto a una densidad superficial “suavizada” de la distribución observada. Es una técnica llamada “*unsharp-masking*” que se utiliza en procesamiento de imágenes, para detectar características a muy bajo nivel de brillo superficial.

En los los mapas siguientes, la densidad *suavizada* se calcula como la mediana de regiones delimitadas por anillos a distancias galactocéntricas cada 2 kpc y ángulos acimutales cada 25°.

# Mapa de densidad superficial de HI



Nakanishi & Sofue 2003,  
PASJ 55, 191

Fig 5

# Mapa de densidad superficial de HI (arriba) vs. mapa de perturbaciones en la densidad superficial de HI (abajo) (sólo $R > R_0$ )

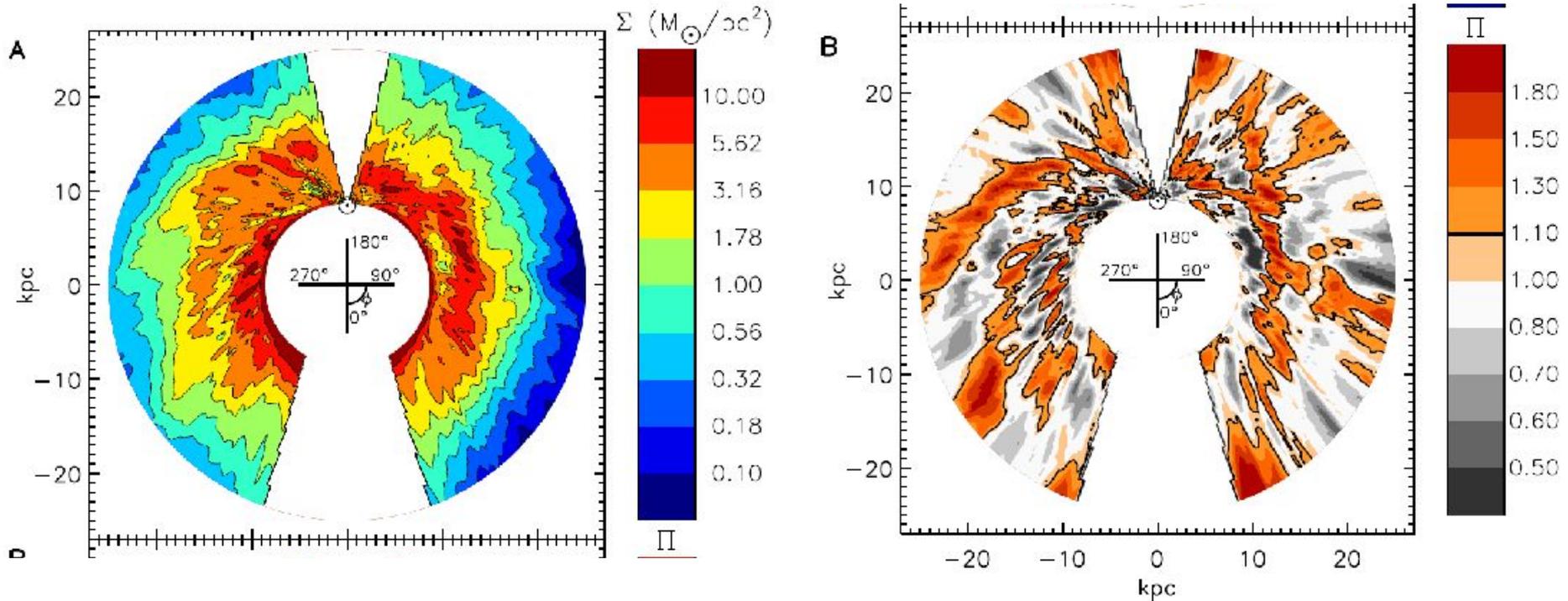
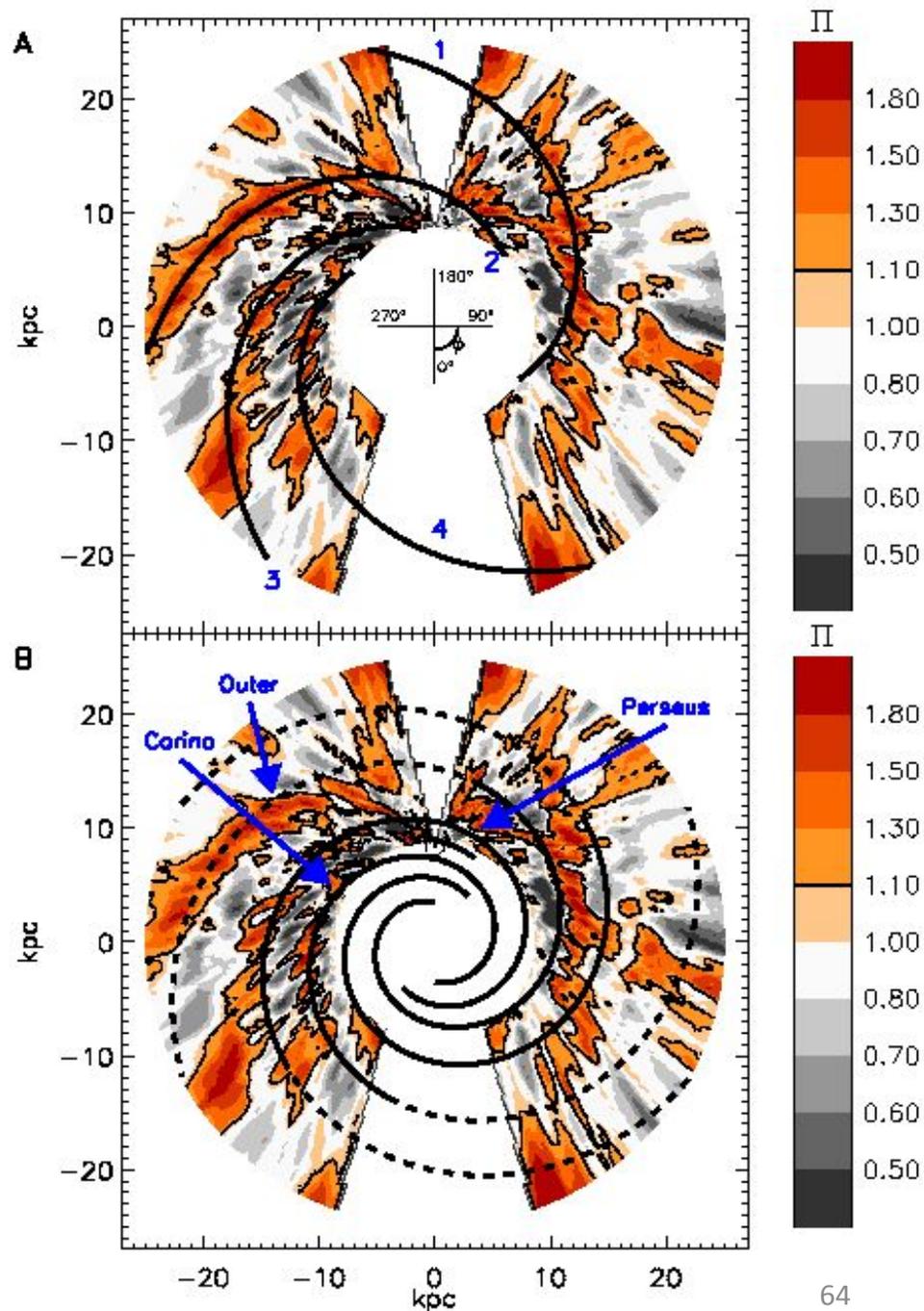


Figure 1: A: Contour plot of the surface density  $\Sigma(R, \phi)$ . The location of the Sun is marked at  $(0, 8.5 \text{ kpc})$  by the solar symbol  $\odot$ . The regions excluded due to unreliable distances are the large blank wedges near the Sun-Galactic center line. B: Contour plot of  $\Pi(R, \phi)$ , as defined in the text. Colored regions are overdense compared to the local median, whereas grayscale regions are underdense. The solid contour marks the line  $\Pi = 1.1$ . The values of  $\Pi$  for the different contour levels are given by the colorbar.

# Mapa de perturbaciones en la densidad superficial de HI - estructura espiral

Figure A: The same contour plot as in Fig. 1, with a four armed logarithmic spiral fit overplotted. The fitting method is described in the text. Other fits that connect different features are possible.

Figure B: The same contour plot as in Fig. 1, with the four armed symmetric spiral model overplotted. The solid lines represent the model over its claimed range of validity; the dashed lines are an extension beyond that range. The unlabeled short line near the Sun is the local Orion arm. The width of the model arms is arbitrary.



# Movimiento perpendicular al plano Galáctico

## Determinación de la fuerza perpendicular al plano Galáctico $K_z$

Vimos que las estrellas del disco se mueven alrededor del centro Galáctico en órbitas en aproximadamente circulares. ¿Cómo es el movimiento en la dirección  $z$ ?

La fuerza (por unidad de masa) ejercida por la Galaxia sobre las estrellas en la dirección  $z$  se denomina  $K_z$  (del alemán: kraft = fuerza).

**Hipótesis:** Para calcularla se supone que se puede **desacoplar** el movimiento en la dirección  $z$  con respecto al movimiento de rotación general en el plano. Así, si consideramos una estrella moviéndose en órbita circular en el plano y la perturbamos ligeramente, dándole una pequeña velocidad en la dirección  $z$ , la estrella seguirá experimentando la misma fuerza radial (o sea que la proyección de su órbita en el plano seguirá siendo circular). Esta aproximación será válida para valores de  $z$  *pequeños*.

La suposición de desacoplamiento implica que *la energía total en  $z$  es cte*:

$$E_{\text{tot}}(z) = \text{cte.}$$

# Movimiento perpendicular al plano Galáctico

## Determinación de la fuerza perpendicular al plano Galáctico $K_z$

Sean:

$\mathbf{Z}$  : la velocidad en dirección  $z$ , a una distancia  $z$  del plano

$\mathbf{Z}_0$  : la velocidad en dirección  $z$ , en  $z = 0$

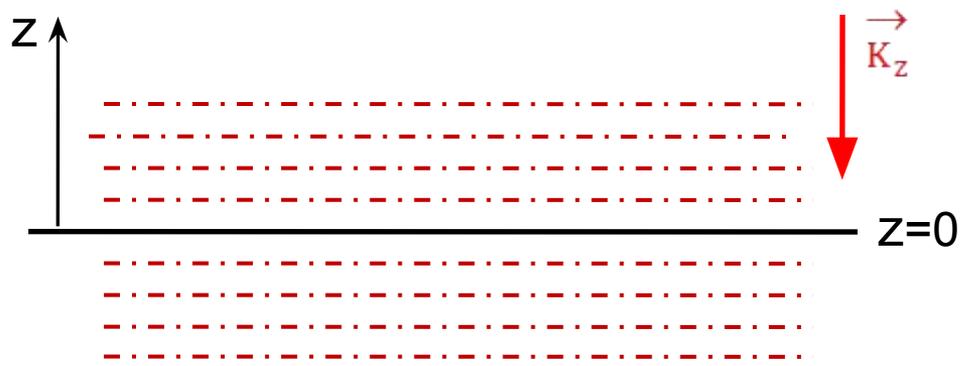
$\phi(z)$  : el potencial, medido con respecto a  $\phi(0) = 0$  en  $z = 0$

La conservación de la energía implica que

$$\frac{1}{2} \mathbf{Z}^2 + \phi(z) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_0^2$$
$$\frac{1}{2} \mathbf{Z}^2 - \int_0^z K_{z'} dz' = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_0^2 \quad (1)$$

Nos preguntamos ahora cómo varía  $K_z$

Para  $z$  pequeños, la Galaxia puede suponerse como una sucesión de infinitos planos paralelos, cada uno de ellos con una densidad constante pero con una distribución de densidad en la dirección  $z$  dada por  $\rho(z)$ .



( $K_z$  es negativa, la dirección de la fuerza es de atracción hacia el plano)

(Esta aproximación no es válida cerca del centro de la Galaxia por la gran concentración de materia).

Por tanto, debe ser:

$$K_{z'} = -4\pi G \int_0^{z'} \rho(z) dz$$

Y para  $z$  *suficientemente pequeños*, se puede tomar  $\rho(z) = \text{cte.} = \rho_0$ , por tanto

$$K_z = -4\pi G \rho_0 z \quad \text{o} \quad \frac{dK_z}{dz} = -4\pi G \rho_0 \quad (\text{ecuación de Poisson})$$

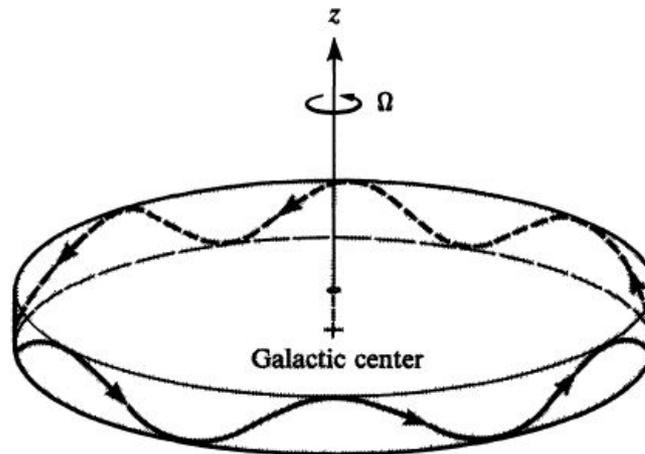
Vemos que  $K_z$  es una función lineal de  $z$  (actúa como una fuerza de recuperación) y tenemos así un **movimiento oscilatorio armónico en la dirección  $z$**  (para valores de  $z$  pequeños).

Esto implica que las estrellas del disco, a medida que van desarrollando su rotación en torno al centro Galáctico, además van realizando oscilaciones en la dirección  $z$ , cruzando el plano en ambos sentidos.

En la ec. (1), reemplazando por la expresión de  $K_z$ , se ve que cuando  $\mathbf{Z}^2 = 0$ , la variable  $z$  corresponderá a *la máxima altura* " $z_{max}$ " que puede alcanzar una estrella sobre el plano, que dependerá de la velocidad con que cruzó el plano  $\mathbf{Z}_0$  y de la densidad en los alrededores del Sol  $\rho_0$ .

El período del movimiento en  $z$  en los alrededores del Sol es menor que el período de la rotación ( $P_{rot} = 2 \times 10^8$  años), siendo del orden de  $P_z \sim 60$  a  $80 \times 10^6$  años.

Esto implica que las estrellas del disco en los alrededores del Sol, realizan aproximadamente 3 oscilaciones en  $z$  mientras recorren una órbita en torno al centro Galáctico.



El resultado más importante que se obtiene a partir del estudio del movimiento perpendicular al plano Galáctico, consiste en la determinación de la *densidad total*  $\rho_0$  en los alrededores del Sol, y en particular la **densidad de materia oscura**  $\rho_{\text{DM}}$  en los alrededores del Sol.

Para ello es necesario obtener primero  $K_z$  (estudiando una dada población estelar como trazadora; ver p. ej. Hagen & Helmi, 2018). Una vez calculada  $K_z$  se obtiene la densidad total, y se compara con la resultante de la componente bariónica (estrellas + medio interestelar). La diferencia es la densidad de materia oscura.

# The vertical force in the solar neighbourhood using red clump stars in TGAS and RAVE

## Constraints on the local dark matter density

Jorrit H. J. Hagen and Amina Helmi

### ABSTRACT

*Aims.* We investigate the kinematics of red clump (RC) stars in the solar neighbourhood by combining data from *Tycho-Gaia* Astrometric Solution (TGAS) and Radial Velocity Experiment (RAVE) to constrain the local dark matter density.

*Methods.* After calibrating the absolute magnitude of RC stars, we characterized their velocity distribution over a radial distance range of 6–10 kpc and up to 1.5 kpc away from the Galactic plane. We then applied the axisymmetric Jeans equations on subsets representing the thin and thick disks to determine the (local) distribution of mass near the disk of our Galaxy.

*Results.* Our kinematic maps are well behaved, permitting a straightforward local determination of the vertical force, which we find to be  $K_z^{\text{thin}} = -2454 \pm 619 \text{ (km s}^{-1}\text{)}^2 \text{ kpc}^{-1}$  and  $K_z^{\text{thick}} = -2141 \pm 774 \text{ (km s}^{-1}\text{)}^2 \text{ kpc}^{-1}$  at 1.5 kpc away from the Galactic plane for the thin and thick disk samples and for thin and thick disk scale heights of 0.28 kpc and 1.12 kpc, respectively. These measurements can be translated into a local dark matter density  $\rho_{\text{DM}} \sim 0.018 \pm 0.002 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$ . The systematic error on this estimate is much larger than the quoted statistical error, since even a 10% difference in the scale height of the thin disk leads to a 30% change in the value of  $\rho_{\text{DM}}$  and a nearly equally good fit to the data.

$$\rho_{\text{DM}}(R_{\odot}, 0) = 0.018 \pm 0.002 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$$

**Table 3** Estimated Parameters of the Milky Way Model

Component	Parameter	Value
Bulge	Half-mass scale radius	$R_b \sim 0.3 \text{ kpc}$
	Mass	$M_b \sim 1.5 \times 10^{10} M_\odot$
Disk	Scale radius	$R_d \sim 4.0 \text{ kpc}$
	Central mass density	$\Sigma_{dc} \sim 1.2 \times 10^3 M_\odot \text{ pc}^{-2}$
	Mass	$M_d \sim 1.2 \times 10^{11} M_\odot$
Dark matter halo	Scale radius	$R_h \sim 5.0 \text{ kpc}$
	Central volume mass density	$\rho_{hc} \sim 0.01 M_\odot \text{ pc}^{-3}$
	Mass in <u><math>r = 20 \text{ kpc sphere}</math></u>	$M_h (20 \text{ kpc}) = 1.0 \times 10^{11} M_\odot$
Total Galaxy mass	Mass in <u><math>r = 20 \text{ kpc sphere}</math></u>	$M_{\text{total}} (20 \text{ kpc}) = 2.3 \times 10^{11} M_\odot$



**Ej. de determinación de las componentes del movimiento solar ( $U, V, W$ ) $_{\odot}$  y la distancia Sol-centro Galáctico  $R_0$**  (Krisanova et al. 2020, Astronomy Letters, 46, No.6, 370)

$U_{\odot}$ , km s $^{-1}$	$V_{\odot}$ , km s $^{-1}$	$W_{\odot}$ , km s $^{-1}$	$R_0$ , kpc	Ref (*)	Sample
$7.5 \pm 1.9$	$11.2 \pm 1.3$	—	$7.1 \pm 0.5$	(1)	OB stars
$6.5 \pm 1.8$	$12.1 \pm 1.7$	$7.2 \pm 1.2$	$7.5 \pm 0.5$	(2)	Ceph.+OSCs
$7.9 \pm 0.7$	$11.7 \pm 0.8$	$7.4 \pm 0.6$	$8.0 \pm 0.2$	(3)	Cepheids
$11.1 \pm 1.3$	$18.3 \pm 1.2$	$8.8 \pm 1.1$	$8.4 \pm 0.12$	(4)	130 masers
$8.53 \pm 0.38$	$11.22 \pm 0.46$	$7.83 \pm 0.32$	$8.0 \pm 0.15$	(5)	OSCs
$6.53 \pm 0.24$	$7.27 \pm 0.31$	—	$8.0 \pm 0.15$	(6)	OB stars

(1) Melnik et al. (2001); (2) Zabolotskikh et al. (2002); (3) Bobylev (2017); (4) Rastorguev et al. (2017); (5) Bobylev and Bajkova (2019b); (6) Bobylev and Bajkova (2019a).

“OSC”: cúmulos estelares abiertos jóvenes

“masers” : asociados con protoestrellas O y B muy masivas o estrellas T Tauri jóvenes, con paralajes trigonométricas y mov propios medidos con VLBI.

# Densidad de estrellas en los alrededores del Sol, en el espacio de velocidades: “grupos en movimiento”

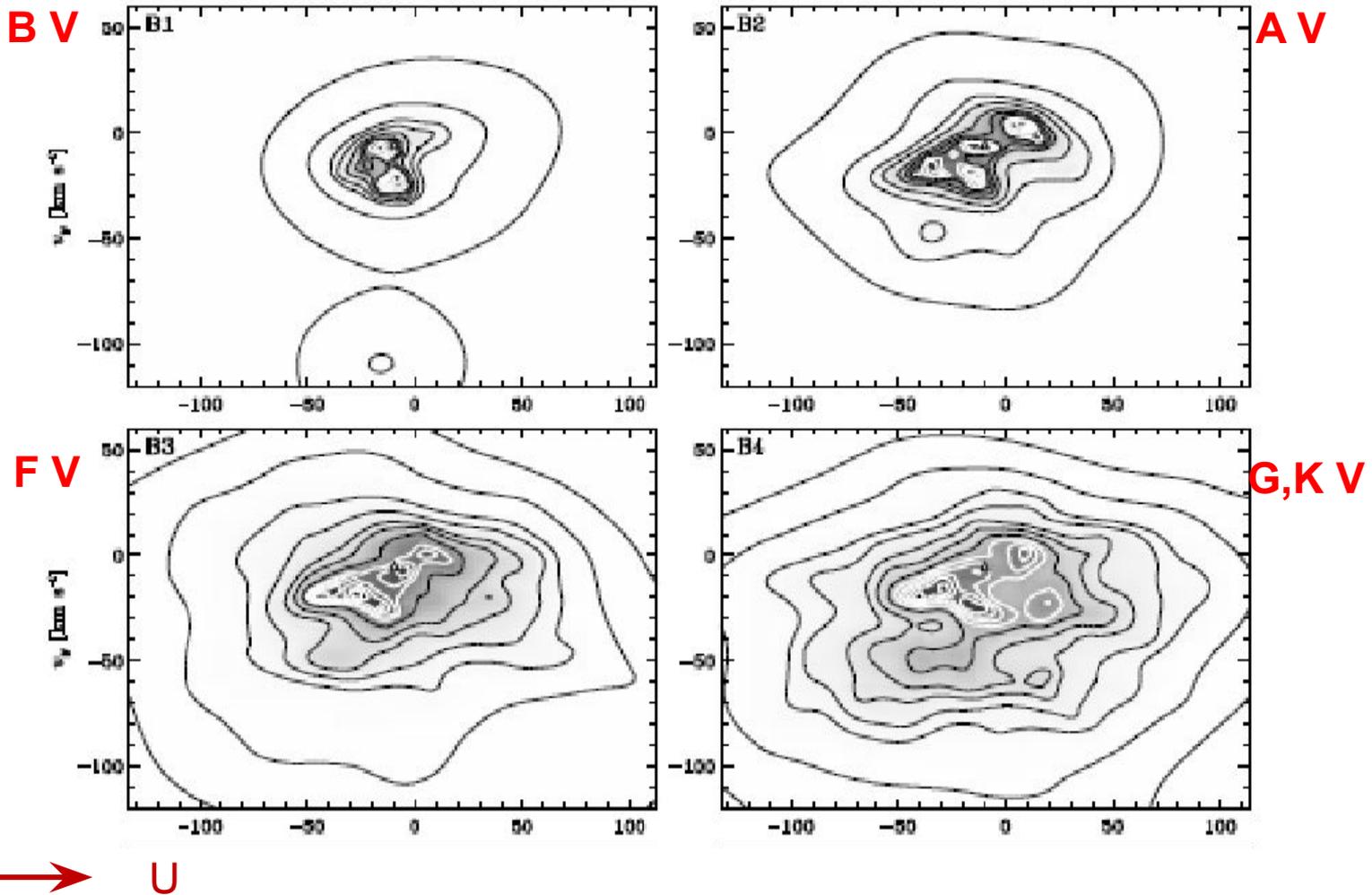


FIG. 3.—Distributions in  $v_x$  (toward the Galactic center) and  $v_y$  (in direction of Galactic rotation): projection of  $f(v)$  obtained as MPLE for the sets listed in Table 1. Gray scales are linear and the contours contain, from inside outward, 2, 6, 12, 21, 33, 50, 68, 80, 90, 95, 99, and 99.9 percent of all stars; i.e., half the stars are within the innermost dark contour. The origin is at the solar velocity, while the velocity derived for the LSR in Paper I is indicated by a triangle. Note that the smoothing is optimal for the full sample (AL) only, while the results for the subsets are undersmoothed. However, since the subsets are distinct, any feature common to more than one of them is likely to be real.

The results just obtained are general (within the framework of the assumptions made) and apply at arbitrary values of  $R$  from the galactic center and distances  $d$  from the Sun. But optical observations of stars in the disk of our Galaxy are generally restricted by interstellar absorption to relatively small distances (say, up to 2 kpc) from the Sun. It is therefore worthwhile to develop formulae that are valid for small  $d$ , and, in fact, we can obtain extremely convenient approximate forms of equations (8-4) and (8-8) that permit a direct analysis of the characteristics of differential galactic rotation in the neighborhood of the Sun. These expressions were first derived by Oort (**O1**), and they are named in his honor.

Consider first equation (8-4) for fixed  $\ell$ .  $R_0$  is fixed, and only the term  $(\omega - \omega_0)$  can depend on distance. We can estimate the variation of  $(\omega - \omega_0)$  by use of a first-order Taylor expansion

$$(\omega - \omega_0) \approx \left( \frac{d\omega}{dR} \right)_{R_0} (R - R_0) \quad (8-9)$$

$$\frac{d\omega}{dR} = \frac{d}{dR} \left( \frac{\Theta}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{d\Theta}{dR} - \frac{\Theta}{R^2} \quad (8-10)$$

$$\left( \frac{d\omega}{dR} \right)_{R_0} = \frac{1}{R_0} \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} - \frac{\Theta_0}{R_0^2} \quad (8-11)$$

Therefore, to first order

$$v_R = \left[ \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} - \frac{\Theta_0}{R_0} \right] (R - R_0) \sin \ell \quad (8-12)$$

Now, as can be seen in Figure 8-9, for  $d \ll R_0$ , the projection of  $R$  onto  $R_0$  is almost equal to  $R$ , so that, to a good approximation,

$$R_0 - R \approx d \cos \ell \quad (8-13)$$

which, when substituted into equation (8-12), yields

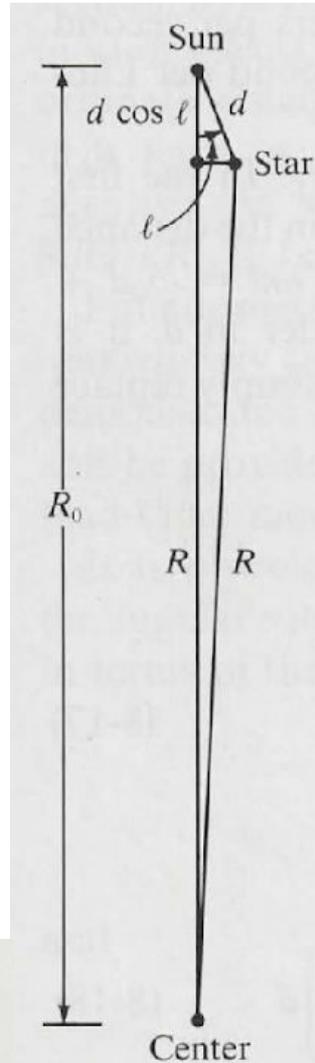
$$v_R \approx \left[ \frac{\Theta_0}{R_0} - \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right] d \sin \ell \cos \ell \quad (8-14)$$

Then, using the trigonometric identity  $\sin \ell \cos \ell = \frac{1}{2} \sin 2\ell$ , and defining

$$A = - \frac{R_0}{2} \left[ \frac{d\omega}{dR} \right]_{R_0} \quad A = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Theta_0}{R_0} - \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right] \quad (8-15)$$

which is called *Oort's constant A*, we obtain, to first order in  $d$ ,

**Figure 8-9.** Geometric construction showing  $R_0 - R \approx d \cos \ell$  when  $d \ll R_0$ .



$$v_R = A d \sin 2\ell \quad (8-16)$$

In harmony with the results we obtained from the heuristic arguments given at the beginning of this section, equation (8-16) shows that, because of differential galactic rotation, the radial velocities of stars in the galactic disk will show a *double sine-wave* variation with galactic longitude (see Figure 8-3), with an amplitude that increases linearly with distance. Equation (8-16) is valid for all disk stars with  $d \ll R_0$ . Hence, if we can observe  $v_R$  and estimate  $d$  for a large sample of stars, we can estimate  $A$  and hence place constraints on the local values of  $\omega_0$  and  $(d\omega/dR)_{R_0}$  [see equations (8-22) and (8-23)]. In most work,  $v_R$  is expressed in kilometers per second and  $d$  in kiloparsecs, so that  $A$  has units of kilometers per second per kiloparsec.

Now, consider equation (8-8) for the tangential velocity  $v_T$ . In the first term, we can write an expression for  $(\omega - \omega_0)$  that is first order in the distance  $d$  directly from equations (8-9) and (8-13). In the second term,  $\omega d = \omega_0 d + (\omega - \omega_0)d$ , and, because  $(\omega - \omega_0)$  is already of the first order in  $d$ , it is obvious that, if we are to retain only first-order terms, we can simply replace  $\omega d$  with  $\omega_0 d$ . Thus equation (8-8) becomes

$$\begin{aligned} v_T &\approx \left[ \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} - \frac{\Theta_0}{R_0} \right] (R - R_0) \cos \ell - \omega_0 d \\ &\approx \left[ \frac{\Theta_0}{R_0} - \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right] d \cos^2 \ell - \left( \frac{\Theta_0}{R_0} \right) d \end{aligned} \quad (8-17)$$

or, using the trigonometric identity  $\cos^2 \ell = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\ell)$ ,

$$v_T = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Theta_0}{R_0} - \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right] d \cos 2\ell - \frac{1}{2} \left[ \frac{\Theta_0}{R_0} + \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right] d \quad (8-18)$$

Now, using equation (8-15), and defining *Oort's constant B* as

$$B = - \frac{R_0}{2} \left. \frac{d\omega}{dR} \right|_{R_0} - \omega_0 \quad B \equiv - \frac{1}{2} \left[ \frac{\Theta_0}{R_0} + \left( \frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right] \quad (8-19)$$

we finally obtain

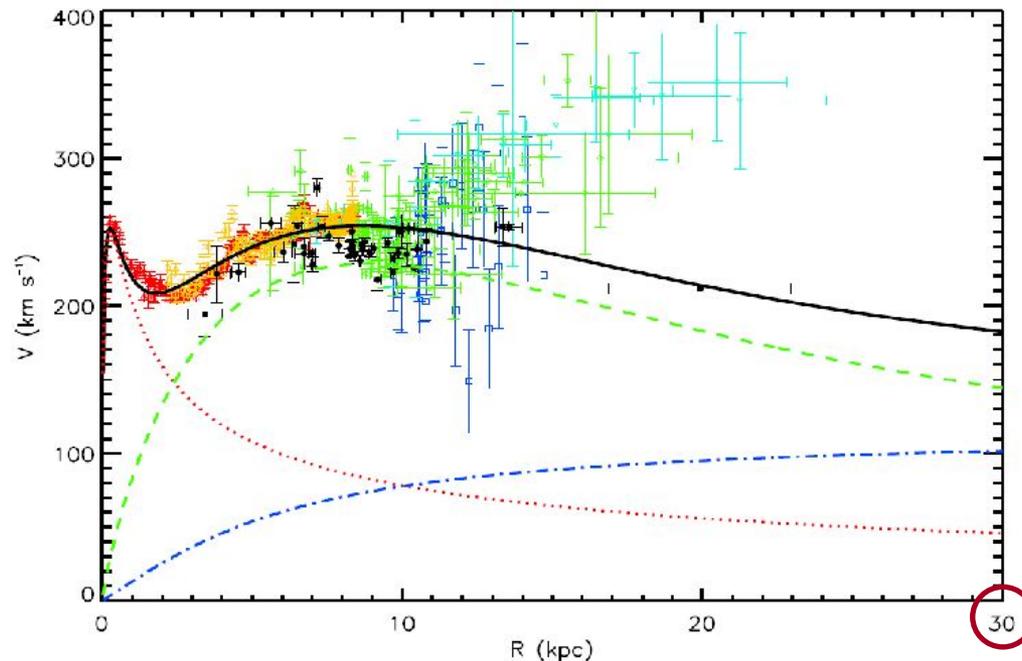
$$v_T = d(A \cos 2\ell + B) \quad (8-20)$$

## VLBA (Very Long Baseline Array)





45m-Telescope with Spring mountains (Japan)



**Fig. 1** Recalculated rotation data of the Milky Way using the new Galactic constants  $(R_0, \Theta_0) = (8.4 \text{ kpc}, 254 \text{ km s}^{-1})$ , with the rotation curve corresponding to Fit #1 (*thick solid line*). The dotted, dashed and dash-dotted lines represent the bulge, disk and dark matter halo contributions respectively. Red triangles: HI- and CO-line tangent velocity method (Clemens 1985); yellow open circles: HI tangent velocity method (Fich et al. 1989); green diamonds: HII regions (Fich et al. 1989); blue squares: C stars (Demers & Battinelli 2007); cyan reverse triangles: HI-disk thickness method (Merrifield 1992; Honma & Sofue 1997); black filled circles: HMSFR data (Ando et al. 2011; Hirota et al. 2011; Honma et al. 2011; Imai et al. 2011; Kurayama et al. 2011; Moscadelli et al. 2011; Niinuma et al. 2011; Oh et al. 2010; Rygl et al. 2010; Rygl et al. 2012; Sanna et al. 2009; Sanna et al. 2012; Sato et al. 2010; Tafaya et al. 2011; Xu et al. 2011 and Reid et al. 2009)