Mecánica Cuántica - Curso 2023

Práctica N^o 8: Momento angular, potenciales centrales y espín

1. Muestre que en un autoestado de L_z se cumple que $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$.

2. Resolver la ecuación de Schrödinger para el caso de un pozo esférico infinito. Discuta cualitativamente cómo se modifica el análisis si el pozo fuese finito.

3. Mostrar que teniendo en cuenta la interacción espín - órbita el momento angular que conmuta con el Hamiltoniano es $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

4. Considere el Hamiltoniano dado por $\hat{H} = \omega S_x$. Resuelva la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con la condición inicial $|\psi(0)\rangle = \binom{1}{0}$ y obtenga (e interprete) la cantidad $|\langle \psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$.

5. Un electrón bajo la influencia de un campo de inducción magnética en la dirección del eje cartesiano y tiene, inicialmente, su espín en la dirección x. Calcule la probabilidad de encontrarlo con su espín apuntando en la dirección z-positiva. Considere únicamente la interacción entre el campo externo y el momento dipolar magnético de espín, $\mathcal{H} = -\mu \cdot \mathbf{B} \equiv \omega S_y$.

6. Sean $\mathbf{s_1}$ y $\mathbf{s_2}$, los operadores de espin 1/2, de un sistema de dos partículas. Escriba los elementos de la base de los operadores $\mathbf{s_1^2}$, $s_{z,1}$, $\mathbf{s_2^2}$ y $s_{z,2}$. A partir de estos elementos, construya los autovectores correspondientes a los operadores $\mathbf{s_1^2}$, $\mathbf{s_2^2}$, $\mathbf{s^2}$ y s_z, donde $\mathbf{s} = \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2}$. Estudie la simetría de estos autovectores frente a la permutación de las partículas 1 con 2.

7. Dos partículas con espín 1/2 forman un sistema compuesto. El espín Q se encuentra en el autoestado de $S_y = -1/2$ mientras que el espín P está en el autoestado $S_x = 1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en un estado con spín total $s = 1$ y $m_s = 0$?

8. Considere el Hamiltoniano representado por

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   y el estado inicial dado por

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \text{ - i} \\ 1 \text{ - i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   ¿Qué valores de energía podrán obtenerse luego de un proceso de medición? ¿Con que probabilidad?

   Calcule el valor de expectación del Hamitoniano en el estado inicial.

9. Considere una partícula sin espín que es representada por la función de onda dada por $\psi = K[x + y + 2z]\mathrm{e}^{-\alpha r}$, donde r es la coordenada radial tradicional, K la constante de normalización y $\alpha > 0$.

   a) Calcule el momento angular total de la partícula.

   b) Caclule el valor de expectación de la componente z del momento angular.

   c) Calcule la probabilidad de que al realizar una medición de L_z el resultado sea $\hbar$.