Mecánica Cuántica - Curso 2023

Práctica N^o 6: Propiedades de Operadores

1. El operador de traslación $\Omega(a)$ está definido por

$$\Omega(a)\psi(x) = \psi(x+a)$$

Muestre que:

a) $\Omega(a)$ puede expresarse en términos del operador $p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$,
b) $\Omega(a)$ es unitario.

2. En mecánica clásica, la elección del cero para la energía potencial es arbitrario. Analice cual es el efecto sobre la energía y la función de onda de agregar, a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, un potencial constante.

3. Verificar las siguientes propiedades de conmutadores de operadores:

a) $[A, B] = -[B, A]$
b) $[A, B_1 + B_2] = [A, B_1] + [A, B_2]$
c) $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$
d) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

4. Considere dos operadores $\hat{\mathcal{O}}$ y $\hat{\mathcal{P}}$ cuyo conmutador puede escribirse como:

$$[\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{P}}] = i\hat{\mathcal{C}},$$

donde $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}^\dagger$.

Demuestre que:

$$\Delta\hat{\mathcal{O}}^2\Delta\hat{\mathcal{P}}^2 \geq \frac{1}{4}\langle\hat{\mathcal{C}}\rangle^2,$$

donde $\Delta\hat{\mathcal{O}}^2$ y $\Delta\hat{\mathcal{P}}^2$ son las dispersiones cuadráticas de los operadores $\hat{\mathcal{O}}$ y $\hat{\mathcal{P}}$ respectivamente y $\langle\hat{\mathcal{C}}\rangle$ el valor medio del operador $\hat{\mathcal{C}}$.

A partir de esta relación, deduzca la relación de incerteza para x y p_x.

5. Demuestre que si $V(x) = 0$ la evolución temporal de un estado arbitrario $\psi(x, 0)$ está dada por

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u K(x, u; t)\psi(u, 0),$$

donde

$$K(x, u; t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\mathrm{e}^{\frac{im(x-u)^2}{2\hbar t}}.$$

Dicha función recibe, genéricamente, el nombre de propagador temporal.

6. Considere los operadores

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + ip/m\omega) \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - ip/m\omega),$$

donde x y p son operador posición y el impulso lineal respectivamente.

a) Calcule $[a, a^\dagger]$

b) Definido $N = a^\dagger a$ encuentre la relación con el Hamiltoniano del oscilador armónico.

c) Denote con $|n\rangle$ y n a los autoestados y autovalores del operador número N. Obtenga los correspondientes al oscilador armónico como función de ellos.

d) Calcule $[N, a]$ y $[N, a^\dagger]$.

e) ¿Puede decir algo en relación a los kets $a^\dagger|n\rangle$ y $a|n\rangle$? En función de esto, ¿qué nombre les asignaría?

7. Obtenga la derivada temporal del valor medio de un operador $\hat{O}$. Relacione este resultado con lo obtenido en el contexto de mecánica clásica. Analicen el caso particular para la posición, x y el impulso, p.

AYUDA: Recuerde las ecuaciones de Hamilton y la definición del corchete de Poisson.