Mecánica Cuántica - Curso 2023

Práctica N^o 5: El Oscilador Cuántico

1. Obtenga expresiones analíticas para las primeras cinco funciones de onda del oscilador armónico en una dimensión y grafíquelas. Discuta la normalización de las funciones de onda.

2. Considere un estado del oscilador armónico cuántico

   a) Muestre que, de acuerdo a la mecánica clásica, la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $(x, x + dx)$ está dado por:

$$P_{cl}(x)dx = \frac{1}{\pi x_{cl}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_{cl}^2}}} dx \ , \quad -x_{cl} \leq x \leq x_{cl},$$

   donde $\pm x_{cl}$ son los puntos clásicos de retorno.

   b) Compare este resultado con el resultado cuántico. Obtenga una expresión para la probabilidad de encontrar la partícula fuera de la región clásica para el caso caracterizado por $n = 1$.

3. Considere un oscilador armónico unidimensional cuya energía potencial viene dada por la función $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Imagine que el estado inicial $(t = 0)$ del sistema está caracterizado por la función de onda dada por:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{|x|}\right) f(x),$$

   donde $f(x)$ es una función real e impar de x, definida para todos los números $\mathbb{R}$ que se encuentra correctamente normalizada.

   a) ¿Cuál es la paridad de $\psi(x, 0)$? ¿Puede, entonces, ser un autoestado del Hamiltoniano?

   b) ¿Cuál es la probabilidad inicial de encontrar a la partícula en la región $x \geq 0$? ¿Y para $x \leq 0$?

   c) ¿Existen instantes de tiempo t_+, t_- en los que se pueda decir con certeza que la partícula se encontrará en la región $x \geq 0$, $x \leq 0$, respectivamente?

4. Muestre que en el contexto de un oscilador armónico, la densidad de probabilidad para un estado mezcla arbitrario es una función periódica.

5. Calcule los valores posibles para la energía para una partícula en un potencial que viene dado por: $V(x) \to \infty$ si $x \leq 0$ y $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ si $x > 0$.

6. Para un oscilador armónico simple el estado inicial $(t = 0)$ está dado por la siguiente función de onda:

$$\psi(x, 0) = \sqrt{1 - |a|^2} \sum_{k=0}^{\infty} a^k \phi_k(x),$$

donde $\phi_k(x)$ son las autofunciones del oscilador armónico y a es un parámetro complejo cuyo módulo es menor a 1.

a) Encuentre la función de onda para $t > 0$.

b) Calcule la probabilidad de que encontrar al sistema en el estado inicial en un instante $t > 0$.

7. Un sistema caracterizado por el Hamiltoniano,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2),$$

se denomina "oscilador armónico anisotrópico".

Determine los valores posibles para la energía del sistema.

Para el caso isotrópico ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$), calcule la degeneración del nivel E_n.