Práctica 4

Trabajo de investigación

Para el sistema de coordenadas esféricas ($n = 3$)

$\vec{r}(\varphi, \phi, r) = rsen(\varphi)sen(\phi)e_1 + rcos(\phi)e_2 + rcos(\varphi)sen(\phi)e_3$
hallar:

a) Vectores tangentes (base covariante)
b) La métrica del sistema.
c) La base dual (contravariante).
d) Las componentes de la matriz Jacobiana $\left[\frac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial\theta^k}\right]$ de la transformación de coordenadas.

Fecha de entrega 15 de noviembre de 2018

Entendiendo a un tensor como una familia de n-uplas de coeficientes que representan coordenadas en alguna base y que se transforman linealmente al pasar de una base a otra vemos que los tensores pueden tener dos tipos de coeficientes que se diferencian principalmente en la matriz de transformación que necesitan para pasar de una base a la otra. Básicamente la matriz de transformación que hemos visto sirve para los coeficientes llamados covariantes, mientras que esa misma matriz pero inversa es la necesaria para transformar los otros tipos de coeficientes que se llaman contravariantes. Mientras que los covariantes viven en un espacio vectorial, que llamaremos V, los contravariantes viven en otro espacio vectorial que tiene la misma dimensión que V y se denomina V* o dual. En términos de notación escribimos con subíndice (a_i) a los covariantes y con supraíndice (a^j) a los contravariantes.

Para decirlo de una forma más simple, supóngase que un tensor es el cuadro de la Monalisa, el cuadro puede dividirse entre el fondo (el paisaje) y la forma (el rostro de Monalisa). Como puede verse fácilmente el fondo determina la forma y viceversa por eso la denominación dual. Así mismo se llama doble dual, al dual del dual que no es otro que el espacio vectorial V, pero nos sirve porque es la forma de pasar del dual al espacio V.

Otro ejemplo: En el espacio Euclídeo un vector puede representarse como una flecha, entonces dado un vector, el funcional asociado a ese vector y que vive en el espacio dual será el que genera todos los vectores paralelos a ese vector. Otra vez, uno puede saber el vector o el funcional y tendrá información sobre ambos.

Los funcionales son el conjunto de todas las transformaciones posibles entre un espacio vectorial y el cuerpo de los escalares, k. Y ese conjunto junto con el producto interno forman en por sí mismo un espacio vectorial. Hemos trabajando con varios durante las prácticas: Los polinomios, dado un x el resultado es un escalar, también la traza y el determinante, incluso integrales de productos de funciones o series como en el caso de Fourier, ahora bien todos estos funcionales son justamente los elementos del espacio dual. En física si un vector representa la velocidad de una partícula su funcional será el momento angular. Por lo que resultaría interesante saber cómo encontrar éstos funcionales asociados.

Si estamos trabajando en una base ortonormal es fácil ver que, por ser paralelos, el producto entre el vector y su funcional será necesariamente 1, mientras que para los demás vectores que son perpendiculares al primero el producto debe dar 0. Con esta información construimos un sistema de ecuaciones y encontramos los coeficientes necesarios. Aquellos funcionales que anulan a ese vector están en el espacio anulador del vector. Pero el espacio anulador es más interesante cuando se aplica a conjunto de vectores.

La valencia de un tensor es la potencia a la que debemos elevar n, donde n es la dimensión del espacio vectorial sobre el cuál estamos trabajando, para que me del número de coeficientes necesarios para representar al tensor. Este valor de valencia se divide en dos valores p+q, p=covariantes y q=contravariantes, así pues un escalar tiene valencia cero. Un vector tiene valencia 1-covariante y un funcional 1-contravariante. En la matriz que representa una trasformación lineal el espacio dual es el espacio generado por las filas de la matriz. Así una matriz que represente una trasformación lineal es 1-covariante y 1-contravariante y su valencia es 2. También existe lo que se llama transformación traspuesta que es la transformación que va de un espacio dual a otro espacio dual. O sea, cambio las filas por las columnas y así la matriz de la transformación traspuesta es la misma que la de la transformación original pero traspuesta.

Una forma bilineal es 2-contravariante. Si esta forma bilineal se da sobre espacios euclídeos son llamados tensores métricos. Y éstos tensores describen la métrica de un sistema, cuando los tensores métricos son los que utilizó Einstein en su teoría de la Relatividad General, esos tensores describen la métrica del espacio donde estamos inmersos.

Autoevaluación

Verdadero o Falso.

1. Todas las matrices son una suma de una matriz simetrica más otra antisimetrica.
2. Si V es de dimensión finita n, entonces los hiperplanos vectoriales de V son de dimensión n+1.

3. Un hiperplano de V es el núcleo de un funcional lineal no nulo sobre el espacio V.

4. Si un espacio vectorial es suma directa de dos espacios vectoriales, la suma directa de los los espacios duales de esos espacios conforman el espacio dual del espacio vectorial original.

Nota:
Respuestas del Verdadero o Falso práctica 3: Las únicas falsas son la 13 y la 15.