Práctica 3

Trabajo de investigación

De acuerdo con la segunda ley de Kepler, un cometa debería tener una órbita elíptica, parábolica o hiperbólica (despreciando las atracciones gravitacionales de los planetas). En convenientes coordenadas polares, la posición (r,ϑ) de un cometa satisface una ecuación de la forma:

r=$\beta + e(r.\cos(\vartheta))$

donde β es una constante y e es la excentricidad de la órbita, con $0 \leq e \leq 1$ para una elipse, e=1 para una parábola, y $e \geq 1$ para una hipérbola.

Suponga que los siguientes datos corresponden a las observaciones de un cometa recién descubierto. Determine el tipo de órbita e indique dónde estará el cometa cuando ϑ=4.6 radianes.

ϑ	0.88	1.10	1.42	1.77	2.14
r	3.00	2.30	1.65	1.25	1.01

Fecha de entrega viernes 19 de octubre de 2018

La idea básica del ajuste de mínimos cuadrados de los datos (A$\vec{v} = \vec{b}$ no tiene solución entonces encontremos una $\vec{x}$ tal que A$\vec{x}$ esté lo más cerca posible de $\vec{b}$) se debe a K.F Gauss (e, independientemente, a A. Legendre), cuya fama despuntó en 1801 cuando utilizó el método para obtener la trayectoria del asteroide Ceres. Cuarenta días después del que asteriode fue descubierto, desapareció detrás del Sol. Gauss predijo que Ceres aparecería 10 meses después y precisó su ubicación. La exactitud de la predicción asombró a la comunidad científica.
El ajuste es el mismo que hace su GPS con los datos de al menos de tres satélites para determinar su ubicación aproximada sobre la tierra.
Para obtener una solución aproximada de un sistema de ecuaciones inconsistente, se necesita una idea bien definida de cercanía, para lo que se usa los conceptos de norma, producto interno, distancia y proyección ortogonal.

Ejercicios prácticos

Espacios Vectoriales con Producto Interno.

1. Sea E un espacio euclídeo, si $\vec{x}, \vec{y}$ y $\vec{z}$ son vectores de E, desarrolle la siguiente expresión: $\langle \vec{x}+\vec{z}, \vec{x}-\vec{z}+\vec{y}\rangle$

2. Calcule la distancia entre los vectores $\vec{u}=(2,i,1-i)$ y $\vec{v}=(-i,0,4i)$ en $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico.

3. Pruebe que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados
   a)$\langle , \rangle : C\,[0,1] \times C\,[0,1] \to \mathbb{R}, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$
   b) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K, \langle A,B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$ (B^* es la matriz traspuesta conjugada de B).

4. Determine si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encuentre su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.
   a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$
   b) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \Phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 - x_1\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_1$

5. Determine para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es
$$\Phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \alpha x_2y_2$$
   es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

6. Sean $\vec{u}_1=(-2,-1,1), \vec{u}_2=(0,-1,0)$ y $\vec{u}_3=(1,-1,0)$ tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Si definimos el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ afirmando que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una base ortonormal. ¿Cuál sería la expresión analítica de este producto escalar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$?

Matrices ortogonales y complemento ortogonal

7. Demuestre que Q es una matriz de rotación puesto que Q es ortogonal y además su determinante vale 1. $Q=\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$

8. En $\mathbb{P}^2$ se define el producto escalar:$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$

   Pruebe que el conjunto $\left\{1, x, \frac{1}{3}(3x^2-1)\right\}$ es ortogonal.

9. Dada la matriz simétrica $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ construya una matriz ortonormal T tal que $(T^{-1}AT)$ sea una matriz diagonal. Verifique también que $T^{-1}=T^t$ y que el determinante de T es igual a 1. Obtenga asimismo la matriz diagonal $(T^{-1}AT)$.

10. Halle una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ (con el producto interno canónico) que contenga al vector $u = (1, -1, 2)$.

11. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Halle una base ortonormal de autovectores de A.

b) Halle una matriz P ortogonal tal que $P^t AP$ sea diagonal.

12. Sea $B = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Considere el producto interno canónico y utilice Gram-Schmidt para hallar a partir de B una base B' que sea ortonormal. Calcule las coordenadas de $v = (2, -1, 3)$ en la base B'. Utilice sus resultados para encontrar la factorización A=QR.

13. Demuestre que S=$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un conjunto ortonormal donde

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

a) Exprese el vector $\vec{y}$ como combinación lineal del conjunto S. Recuerde las coordenadas se calculan cómo $c_j = (\frac{\vec{y}.\vec{u_j}}{\vec{u_j}\vec{u_j}})$ con $j = 1, 2, 3$ por ser ortogonal.
b) Escriba $\vec{y}$ como la suma de un vector en W y un vector ortogonal a W.

14. Calcule la distancia de un punto $\vec{y}$ en $\mathbb{R}^3$ a un subespacio W generado por $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ sabiendo que el punto más cercano a se calcula como $\|\vec{y} - \hat{y}\|$, donde $\hat{y} = proy_w\vec{y}$.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

15. Halle el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 2x_1 - x_2 = 0\}$ para el producto interno canónico.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 = \langle(1, 2, 1)\rangle$ b_1) para el producto interno canónico b_2) para el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$.

c) $V = \mathbb{C}^3$, $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 3x_1 - ix_2 + 2ix_3 = 0\}$ para el producto interno canónico.

Operador Adjunto. Operador Unitario

16. Halle T^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

b) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donde $B = \{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}$.

c) $T:\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $T(p) = p'$ ($\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$).

17. Determine si los siguientes endomorfismos definidos sobre $\mathbb{R}^3$ son autoadjuntos:

a) $T(x,y,z) = (x+y, x, -z)$

b) $S(x,y,z) = (-2x+2z, y, 2x)$

18. Encuentre en cada caso una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

19. Dada $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 0 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$

encuentre una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ortogonal tal que $U.A.U^*$ sea diagonal.

20. Halle la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales

a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.

b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta $x_1 = x_2$.

Ejercicios teóricos

21. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle , \rangle$ un producto interno sobre V. Pruebe

a) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

b) $\langle x, cy\rangle = \bar{c}\,\langle x,y\rangle$

c) $\langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle \,\forall x \in V \Rightarrow y = z$

22. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Pruebe que $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ sí y sólo sí $\{x,y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

23. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle , \rangle$. Sea $T \in End_K V$ biyectivo y considerar la aplicación $[x,y] = \langle Tx, Ty\rangle$, $\forall x, y \in V$

Pruebe que $[x,y]$ también es un producto interno sobre V

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x,y) = y.A.x^t$. Pruebe que Φ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$ si y sólo sí $A = A^t, A_{11} \geq 0$ y $det(A) \geq 0$.

25. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y sea $T \in End_{\mathbb{C}}V$. Pruebe que si λ es autovalor de T, entonces $\overline{\lambda}$ es un autovalor de T^*.

26. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y sea $T \in End_{\mathbb{C}}V$ autoadjunto. Pruebe que:

    a) si λ es autovalor de T, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

    b) Si v_i es autovector asociado al autovalor λ_i de T (para $i = 1{,}2$) y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

27. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sean S y T $\in End_K V$. Si $k \in K$, pruebe:

    a) $(S+T)^* = S^* + T^*$

    b) $(kT)^* = \overline{k}T^*$

    c) $(ST)^* = T^*S^*$

    Notación Tensorial.

28. Utilice el producto tensorial para escribir de forma tensorial:

    i) Una matriz.

    ii) El producto escalar y el vectorial.

    iii) La ley de transformaciones para tensores de segundo orden.

29. Responda:

    i) ¿Qué es la notación simbólica?

    ii) ¿A qué se denomina base cartesiana?

    iii) ¿La distancia de un punto depende de la forma o métrica donde se mide? De ejemplos.

    iv) ¿El teorema de Pitágoras se cumple por igual en un plano que en una esfera?

    v) ¿La distancia entre más corta entre dos puntos de una esfera, se llama geodésica?

    vi) ¿Qué valor de curvatura gaussiana o función K tiene el espacio euclídeo habitual?

30. Verificar $(a \times b) \times c = (a \cdot c)\ b\ -\ (b \cdot c)\ a$

    (considerar $a = a^i\ g_i$, $b = b^j\ g_j$ y $c = c_l\ g^l$)

31. Probar $\mathbf{y}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$

32. Utilizando que $tr(a \otimes b) = a \cdot b$, expresar $tr\mathbf{A}$ en términos de las componentes A_{ij}, A^{ij} y $A^i_{\cdot j}$.

Autoevaluación

Verdadero o Falso.

1. El subespacio imagen de una transformación lineal es ortogonal a su núcleo.
2. El vector cero es ortogonal a todo vector en $\mathbb{R}^n$.
3. Sean W un plano a travéz del origen en $\mathbb{R}^3$ y L la recta que pasa por el origen y es perpendicular a W. Entonces $L^\perp = W$ y $W^\perp = L$.
4. $T(\vec{x}) = (\frac{\vec{x}.\vec{v}}{\vec{v}\vec{v}}).\vec{v}$ es una transformación de proyección.
5. Una matriz cuadrada U tal que $U^{-1} = U^t$ se denomina ortogonal.
6. Si U es ortonormal tanto las filas como las columnas de U son ortonormales.
7. En la factorización QR el hecho de que R sea invertible es consecuencia directa de que las columnas de A sean linealmente independientes.
8. Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base ortogonal para W, entonces la multiplicación de $\vec{v}_3$ por un escalar, da una nueva base ortogonal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, 3\vec{v}_3\}$
9. Si A=QR, donde Q tiene columnas ortonormales, entonces R=Q^tA.
10. Si $\vec{x}$ no esta en un subespacio W, entonces $\vec{x} - proy_w\vec{x}$ no es cero.
11. Un espacio vectorial con un producto escalar se dice que es un espacio vectorial euclídeo.
12. Si Q es ortogonal se cumple que la norma de $\vec{x}$ es igual a la norma de $Q\vec{x}$.
13. Todo conjunto ortogonal de un espacio euclideo es linealmente dependiente.
14. El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1.
15. El producto de dos matrices ortogonales es la matriz identidad.
16. El rango de A es n si y sólo si $A^t = A$ es invertible.
17. Descomponer un vector $\vec{y}$ en una suma de proyecciones ortogonales sobre espacios unidimensionales es la escencia del proceso de Gram-Smith.
18. dim V = dim W + dim $W^\perp$.
19. $dis(\vec{u}, -\vec{v})^2$= $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\vec{v}$.

Nota:
Respuestas del Verdadero o Falso práctica 2: V,V,V,F,F,V,V,F,V,F,V,V,V,F,F