Práctica 2

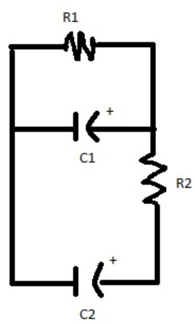
Trabajo de investigación

Un circuito se describe con la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1/R_1 + 1/R_2)/C1 & 1/(R_2C_1) \\ 1/(R_2C_2) & -1/(R_2C_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son los voltajes en los dos capacitores al tiempo t. Suponga que el resistor R_1 es de 1 , R_2=2 , las constantes C_1= 1 y C_2=0.5, con cargas iniciales de 5 en el capacitor C_1 y de 4 en el capacitor C_2. Encuentre las fórmulas para las $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que describan como los voltajes cambian en el tiempo.

Sabiendo que sea $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ un sistema de ecuaciones diferenciales donde la matriz A, de tamaño n x n, es diagonalizable. Considérese que $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, ..., $\overrightarrow{u}_n$ son n vectores linealmente independientes asociados a los valores propios λ_1, λ_2, ..., λ_n de A respectivamente. Entonces el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}\overrightarrow{u}_1 , e^{\lambda_2 x}\overrightarrow{u}_2, ..., e^{\lambda_n x}\overrightarrow{u}_n\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$



Fecha de entrega: Viernes 28 de septiembre

Ejercicios prácticos

Está práctica se tratará sobre autovectores y autovalores que es una herramienta matemática muy útil a la hora de resolver diversos problemas. En una clase que impartió en la Universidad de Góttingen en 1905, el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) utilizó por primera vez el término espectro para referirse al conjunto completo de los autovalores. De hecho, el término fue más que adecuado, puesto que los autovalores del operador que describe los saltos de energía en un átomo, son literalmente los que vemos en el espectro del átomo.

Autovalores y autovectores. Polinomio característico. Diagonalización.

1. Halle el polinomio característico, autovalores y autovectores de las Matrices de Pauli: $\sigma_x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (y, x)$. Halle el polinomio característico, autovalores y autovectores. Interprete geométricamente.

3. Demuestre que si $0 < \theta < \pi$, la matriz $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ no tiene autovalores ni autovectores reales. Interprete geométricamente.

4. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

   $T(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, -y, -x - 3y - 4z)$. Encuentre una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $(T)_B$ sea diagonal.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   la matriz que representa la transformación lineal que proyecta cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ sobre la recta de vector director $(1, 1, 0)$.

   a) Analice si A es semejante sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ a una matriz diagonal. En caso afirmativo hallar la matriz diagonal correspondiente.

   b) Interprete geométricamente lo hallado en a.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Indique para qué valores de α y β la matriz es diagonalizable.

7. Sea

   $$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

   Analice si A es semejante sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ a una matriz diagonal. Idem sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. En caso afirmativo hallar la matriz diagonal correspondiente.

8. Halle A^{10}, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

   (deberá encontrar una matriz P que diagonalice a A)

9. Sabiendo que $A = T^{-1}BT$ con

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & -2 \\ 8 & 13 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ -12 & -20 & -8 & -13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcule A^6.

10. a) Demuestre que si A es una matriz de nxn, entonces el coeficiente de λ^n en el polinomio característico de A es 1. (Un polinomio con esta propiedad se conoce como mónico.)

    b) Pruebe que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -c_3 \end{pmatrix}$$

    tiene el polinomio característico $p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + +c_3\lambda^3 + \lambda^4$. (Sugerencia. Evalúe todos los determinantes del problema, sumando un múltiplo del segundo renglón al primero, para introducir un cero en el lugar superior de la primera columna y, a continuación, desarrollando en términos de cofactores a lo largo de la primera columna.) Esto vale para n e indica que todo polinomio mónico es el polinomio característico de alguna matriz. La matriz se denomina matriz acompañante de $p(\lambda)$.

    c) Halle una matriz con polinomio característico $p(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3\lambda^3 + \lambda^4$.

11. Encuentre la solución del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 = y_1^{'} \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = y_2^{'} \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 = y_3^{'} \end{cases}$$

    con las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ y $y_3(0) = 1$

12. Resuelva la ecuación diferencial homogénea de tercer orden

    $y^{'''} - y^{'} = 0$, con las condiciones iniciales

    y(0)=1, $y^{'}(0) = 0$, e $y^{''}(0) = 1$

    Realizando el cambio

    $z_1 = y, \qquad z_2 = y^{'}, \qquad z_3 = y^{''}.$

Polinomio Minimal

13. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (x, x + y, z)$

    a. Halle el polinomio característico, y el polinomio minimal.

    b. Halle autovalores y una base para cada espacio propio de T.

    c. Determine si T es o no diagonalizable.

Teorema de Hamilton-Cayley.

14. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

    utilice el teorema de Hamilton-Cayley para hallar A^{-1}, A^3 y A^{-3}

15. Utilice las propiedades del polinomio minimal para determinar si las matrices siguientes son diagonalizables o no (considerar sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sobre el cuerpo $\mathbb{C}$).

    a. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

    b. A es una matriz cuadrada tal que $A \neq I$ y $A^3 - A^2 + A = I$

Forma de Jordan. Transformaciones lineales nilpotentes.

16. Encuentre la forma de Jordan de la matriz

    $\begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

17. Escriba todas las matrices de Jordan de 4×4 posibles.

18. Determine las formas de Jordan posibles de una matriz de 4×4 cuyo polinomio característico es $(\lambda + 2)^3.(\lambda - 3)$.

19. Determine las formas de Jordan posibles de una matriz de 5×5 cuyo polinomio minimal es $(\lambda - 2)^2$.

20. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$, tal que su polinomio característico es $(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)\lambda$

    a) Indique los polinomios minimales de T, y describa en qué casos es diagonalizable.

    b) Si T no es diagonalizable, encuentre su forma de Jordan.

21. Dada

    $$N_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Demuestre que es nilpotente con índice de nilpotencia 6.

22. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico $(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$, y polinomio minimal $(\lambda+1)(\lambda-1)^2$, por lo que no es diagonalizable. Encuentre su forma de Jordan y utilicela para encontrar A^{10}

(Ayuda: para hallar las potencias de los bloques de Jordan que son de la forma $(\lambda I_m + N)^k$ utilice el binomio de Newton y el hecho que N es una matriz nilpotente).

Ejercicios teóricos

23. Dado un cuerpo K, sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible. Pruebe que los autovalores de A^{-1} son los inversos de los autovalores de A, y que los autovectores correspondientes a autovalores inversos coinciden.

24. Demuestre que los valores propios de una matriz Hermitiana (A= $A^+ = \overline{A}^t$) son reales. (Ayuda: Sirve empezar por $A\vec{x_i} = \lambda_i \vec{x_i}$ y multiplicar a izquierda por A^+ y por último trasponer y conjugar).

25. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Demuestre que A es diagonalizable si $(a-d)^2 + 4bc > 0$.

    Analice el caso que A sea simétrica ($b = c$).

26. Sea D el operador derivación sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, demuestre que las funciones $sen(kx)$ y $cos(kx)$ son autovectores de D^2. Indique cuáles son los autovalores correspondientes.

27. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal con matriz asociada A respecto a la base canónica, u y $v \in \mathbb{R}^n$ autovectores asociados a los autovalores λ y μ. Indique justificando cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

    a Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el vector αu es un autovector asociado a λ

    b Todo vector del núcleo es autovector

    c El vector $w = v + u$ es autovector de T

    d λ^n es autovalor de T^n con autovector asociado u

    e Una matriz diagonalizable es invertible

28. Dado un cuerpo K, sean A y $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$, P inversible. Demuestre que $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$ y $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ para k un entero positivo.

29. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

    a. Demuestre que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes por T son $\mathbb{R}^2$ y 0.

    b. Si U es la misma transformación pero en $\mathbb{C}^2$, cuya matriz en la base canónica es A, demuestre que U tiene algún subespacio unidimensional invariante.

30. Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, sean S, $T \in End_K V$ tales que $SoT = ToS$. Consideremos un autovalor λ de T y $E_T(\lambda)$ su espacio propio. Pruebe que $E_T(\lambda)$ es S-invariante.

31. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    y sea W_1 el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por $(1, 0)^t$

    a. Pruebe que W_1 es T-invariante.

    b. Demuestre que no existe un subespacio W_2 que sea invariante tal que $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$.

Notación Tensorial.

32. Escriba de forma tensorial:

    i) La traza de una matriz.

    ii) El determinante de una matriz.

33. Escriba el polinomio característico en función de los invariantes de un tensor.

34. Responda:

    i) ¿A qué se denomina tensor esférico?

    ii) ¿Qué expresión toman los invariantes de una matriz que está en su espacio principal?

    iii) ¿Qué expresión toman los invariantes de un tensor esférico?

    iv) ¿Cómo queda la ecuación característica de un tensor antisimétrico?

    v) ¿Cualquier combinación de los invariantes principales será un invariante?

    vi) ¿A qué se llama represenación espectral de un vector?

    vii) ¿Cómo se calcula la matriz inversa usando el teorema de Hamilton-Cayley y los invariantes de un tensor?

    viii) ¿La norma de un tensor es también un invariante?

Autoevaluación

Verdadero o Falso.

1. Si A es invertible entonces cero no es un valor propio de A.
2. Los valores propios de una matriz triangular son los números en la diagonal de la matriz.
3. Si la matriz real $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tiene tres valores propios distintos, entonces los vectores propios correspondientes a esos valores propios constituyen una base para $\mathbb{R}^3$.
4. Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tiene dos valores propios distintos, entonces A tiene a lo más dos vectores propios linealmente independientes.
5. Si A tiene elementos reales, entonces A puede tener exactamente un valor propio complejo.
6. Si det A = 0, entonces 0 es un valor propio de A.
7. Si una matriz de $n \times n$ se tiene n valores propios diferentes, se puede diagonalizar.
8. Si la matriz A de 5×5 tiene 3 valores propios diferentes, entonces A no puede ser semejante a la matriz diagonal.
9. El subespacio propio contiene a todos los vectores propios asociados a λ y además al vector nulo.
10. El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales, por lo tanto tienen el mismo polinomio característico, los mismos valores y vectores propios.
11. La matriz λI - A es invertible entonces λ es un valor propio de A.
12. Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y los mismos valores propios con las mismas multiplicidades algebraicas.
13. Una matriz es diagonalizable sii la multiplicidad algebraica de cada valor propio de la matriz, coincide con la dimensión del subespacio propio correspondiente.
14. El determinante de una matriz es igual a la suma de todos sus autovalores (reales y complejos, y elevados a sus respectivas multiplicidades).
15. La traza de una matriz es igual al producto de todos sus autovalores (reales y complejos, y elevados a sus respectivas multiplicidades).

    Nota:

    Respuestas del Verdadero o Falso práctica 1: V,V,F,V,F,V,V,V,V,V,V,V.