

Práctica 0

¿Sobre qué trata el Álgebra lineal?

El álgebra se dirige por distintos caminos hacia lo que se considera hoy su problema esencial: el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas.

Así como un cartógrafo describiría una ciudad por sus calles, autopistas y plazas, el álgebra lineal se concentra en entender como se comportan las estructuras de una entidad matemática llamadas tensores, los cuales incluyen a las matrices, los vectores y los escalares. También, en una ciudad existen relaciones entre barrios, casas y ciudadanos, en el álgebra lineal podemos desentrañar las relaciones que se dan entre las diferentes estructuras. Es una parte de la matemática en la que podemos aventurarnos a tener un pensamiento muy abstracto en donde pedazos inconexos que ya traemos pueden ahora encontrar su por qué y su lugar en el gran rompecabezas del álgebra.

En este curso semestral les proponemos no sólo que incorpore los nuevos conceptos sino que también ejercite su capacidad de investigación y la de transmitir sus hallazgos, lo cual es igual de importante.

Las prácticas contarán con ejercicios prácticos y ejercicios teóricos y alentaremos a que pase a exponerlos en el pizarrón, lo cual mejorará su oratoria. Además cuenta con un trabajo de investigación el cual debe presentar y aprobar. Por último, las prácticas cuentan con una parte de autoevaluación que le servirá para saber qué temas debe reforzar.

Trabajo de investigación

Realice una pequeña investigación de las definiciones de:

- a) Un escalar.
- b) Un vector.
- c) Una matriz.
- d) Un tensor.

Teniendo en cuenta los siguientes items:

- a) Incluya al menos un gráfico por cada tipo y describa ese gráfico.
- b) Resuma que tipo de operaciones se pueden hacer con cada uno.
- c) Construya una opinión práctica personal de qué son estas entidades matemáticas.
- d) Cite fuentes o bibliografías.

Fecha de entrega: Martes 5 de noviembre

Ejercicios prácticos

Producto escalar. Norma. Distancia y ángulo entre vectores

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, siendo (\cdot) el producto escalar, para $\vec{u} = (2, -5, -1)$ y $\vec{v} = (3, 2, -3)$.
2. Sea $\vec{v} = (1, -2, 2, 0)$. Encuentre un vector unitario \vec{u} en la misma dirección que \vec{v} .
3. Demuestre que \vec{c} es ortogonal a \vec{d} siendo $\vec{c} = (4/3, -1, 2/3)$ y $\vec{d} = (5, 6, -1)$.
4. Determine el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{u} = (2, -5, -1)$ y $\vec{v} = (3, 2, -3)$, en estadística este valor recibe el nombre de coeficiente de correlación. Si el valor está cercano a 1 o a -1 los datos están relacionados, de lo contrario si el valor es cercano a 0 no existe ninguna relación entre ellos.
5. Encuentre la distancia entre $\vec{x} = (1, -1, 2)$ y $\vec{y} = (3, 4, -5)$.

Sistemas de ecuaciones lineales

6. Dado el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

- a) Compruebe que la terna $(2t + 3, -3t - 2, t)$ es solución de dicho sistema, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 - b) Justifique por qué éste sistema tiene infinitas soluciones.
 - c) ¿Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales?
7. Dados los sistemas

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

- a) Compruebe que tienen el mismo conjunto solución.
- b) Comente la relación entre los dos sistemas.
- c) ¿Cuáles son las llamadas operaciones elementales?

8. Encuentre los valores de b que hacen que el sistema

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + (b-2)x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + (b-4)x_3 = 3 \end{cases}$$

Tenga: i) Una solución.

ii) Infinitas soluciones.

iii) Ninguna solución.

iv) Describe el conjunto solución para i) y ii)

Nota: utilice el algoritmo de eliminación Gauss y preste atención a la notación.

Matrices. Matrices Semejantes. Matrices elementales.

Arthur Cayley mismo relató en 1894 qué fue lo que le condujo a las matrices: Fue directamente como un modo conveniente de expresar las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dx \end{cases}$$

Simbolizando esta transformación lineal con dos variables independientes por medio de la disposición en cuadro.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

9. Halle las matrices \mathbf{X} e \mathbf{Y} sabiendo que:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{X} - 3\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

10. Si \mathbf{A} es una matriz de tamaño $m \times n$ y \mathbf{B} es una matriz de tamaño $n \times p$, el producto de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} es la matriz de tamaño $m \times p$, cuyo elemento (i,k) es el producto escalar de la fila i de la matriz \mathbf{A} por la columna k de \mathbf{B} , o sea:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Dadas las matrices: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Analice en qué casos es posible calcular: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ - $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, ésta diferencia se la conoce como conmutador.

11. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ver que se simplifica el producto $\mathbf{A}\mathbf{B}$ si se utilizan submatrices.

12. Calcule \mathbf{A}^6 siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Dados los tres pares de datos $(0,-1)$, $(1,1)$ y $(2,0)$, hallar el polinomio de grado menor o igual que dos: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que pasa por dichos pares de datos. Evaluar el valor de $p(x)$ si $x=2/3$. Al polinomio resultante se lo denomina: polinomio de interpolación.

Determinantes y matrices inversibles. Rango de una matriz.

14. ¿ Es invertible la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

?

Justifique de varias maneras su conclusión.

15. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores del parámetro b para que A sea invertible.

16. Piense una forma conveniente para calcular el valor del determinante de una matriz cuadrada y usarlo para calcular el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

17. Encuentre el rango de la matriz en función del parámetro a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios teóricos

18. Demuestre que si

i) $D = [d_{ij}]$ una matriz diagonal de tamaño $n \times n$. Entonces $\det D = \prod_i^n d_{ii}$.

ii) Si A es una matriz triangular del tamaño $n \times n$, entonces $\det A$ es producto de los elementos diagonales de A .

iii) Una matriz A de tamaño $n \times n$ el $\det (tA) = t^n \det A$ siendo t un escalar cualquiera.

19. Demuestre el siguiente enunciado:

Supongamos que \mathbf{u}_0 es una solución particular del sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Si \mathbf{v} es una solución cualquiera del sistema homogéneo asociado $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ es solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Aplice lo demostrado para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + z + w = 4 \\ 2x + y - w = -2 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$$

Notación Tensorial.

20. Utilice el convenio de la suma de Einstein para escribir de forma tensorial:

i) Un vector.

ii) El producto escalar.

iii) Un sistema de ecuaciones.

21. Responda:

i) ¿Qué información me dan los subíndices libres?

ii) ¿Cómo se identifican los subíndices mudos?

iii) ¿Por qué se llama frecuentemente a la delta de Kronecker operador de sustitución?

iv) ¿Qué valor toma la terna 132 para el símbolo de permutación?

22. Desarrollar las expresiones siguientes para $n = 3$

a) $\delta_j^i a^j$, b) $\delta_{ij} x^i x^j$, c) δ_i^i , d) $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j$

23. Verificar en R^3 las siguientes igualdades

a) $\delta^{ij} e_{ijk} = 0$

b) $e^{ikm} e_{jkm} = 2 \delta_j^i$

c) $e^{ijk} e_{ijk} = 3!$

d) $e^{ijm} e_{klm} = \delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j$

Autoevaluación

Verdadero o Falso.

1. Si la distancia entre \vec{u} y \vec{v} es igual a la distancia de \vec{u} y $-\vec{v}$, entonces \vec{u} y \vec{v} son ortogonales.
2. Sean las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se verifica que $\mathbf{AB}^t = \mathbf{A}^t \mathbf{B}$.
3. Consideremos la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

La ecuación $\det \mathbf{A} = 0$, no tiene solución.

4. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$, se verifica la relación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
5. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ una matriz invertible se verifica que $\det \mathbf{A}^{-1} = -\det \mathbf{A} = 1$.
6. Sea $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, si se verifica rango $\mathbf{A} = n$, entonces el sistema es compatible determinado.
7. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ de forma tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, se verifica que $\det \mathbf{A} = 0$ o $\det \mathbf{A} = 1$.

En la próxima práctica tendrá los resultados del verdadero o falso y podrá autoevaluarse.

Nota: