

TRANSFORMADA DE FOURIER



La transformada de Fourier es básicamente el espectro de frecuencias de una función. Un buen ejemplo de eso es lo que hace el oído humano, ya que recibe una onda auditiva y la transforma en una descomposición en distintas frecuencias (que es lo que finalmente se escucha). El oído humano va percibiendo distintas frecuencias a medida que pasa el tiempo, sin embargo, la transformada de Fourier contiene todas las frecuencias del tiempo durante el cual existió la señal; es decir, en la transformada de Fourier se obtiene un sólo espectro de frecuencias para toda la función.

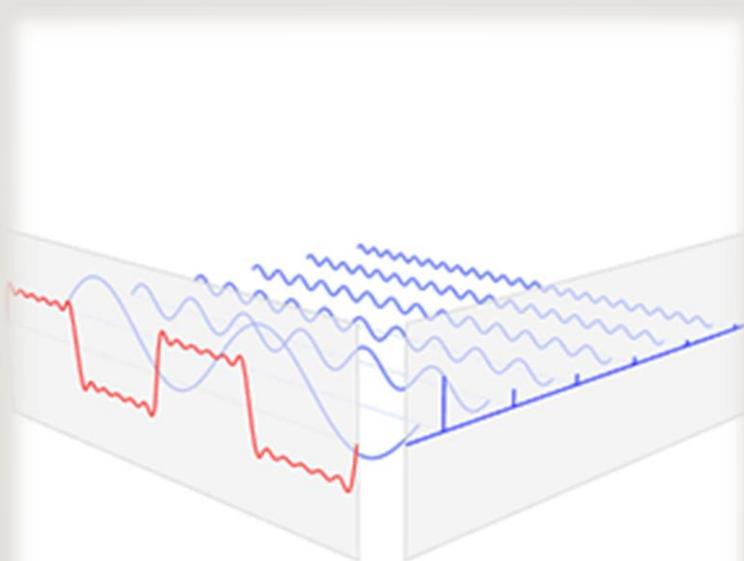


Esquema ilustrativo de la Transformada de Fourier:

f



$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$



\hat{f}

La transformada de Fourier es una aplicación lineal que hace corresponder a una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrable y con finitas discontinuidades en cualquier intervalo, con otra función g definida de la manera siguiente:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

La propiedad más importante de la Transformada de Fourier es que es posible reconstruir f a partir de su transformada, mediante la llamada *fórmula de inversión*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

Aplicaciones:

La transformada de Fourier es muy útil en la teoría de los números, la combinatoria, el procesamiento de señales (electrónica), la teoría de probabilidad, la estadística, la óptica, la propagación de ondas, resolución de ecuaciones diferenciales y otras áreas..



Ejemplo:

Hallar la transformada de Fourier de la siguiente función: $F = e^{-a|x|}$

SOLUCION:

Por propiedades del valor absoluto se sabe que:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}; & x \geq 0 \\ e^{ax}; & x < 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} C_w &= \int_{-\infty}^0 e^{ax} * e^{-iwx} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} * e^{-iwx} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-iw)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(a+iw)x} dx \\ &= \left[\frac{1}{a-iw} * e^{(a-iw)x} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{1}{a+iw} * e^{-(a+iw)x} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

entonces al evaluar estos resultados por sus determinados parámetros se sabe que al evaluarlo por los límites infinito(∞) y menos infinito (-∞) el resultado es cero por lo tanto:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a-iw} + \frac{1}{a+iw} \\ &= \frac{2a}{a^2+w^2} \end{aligned}$$

