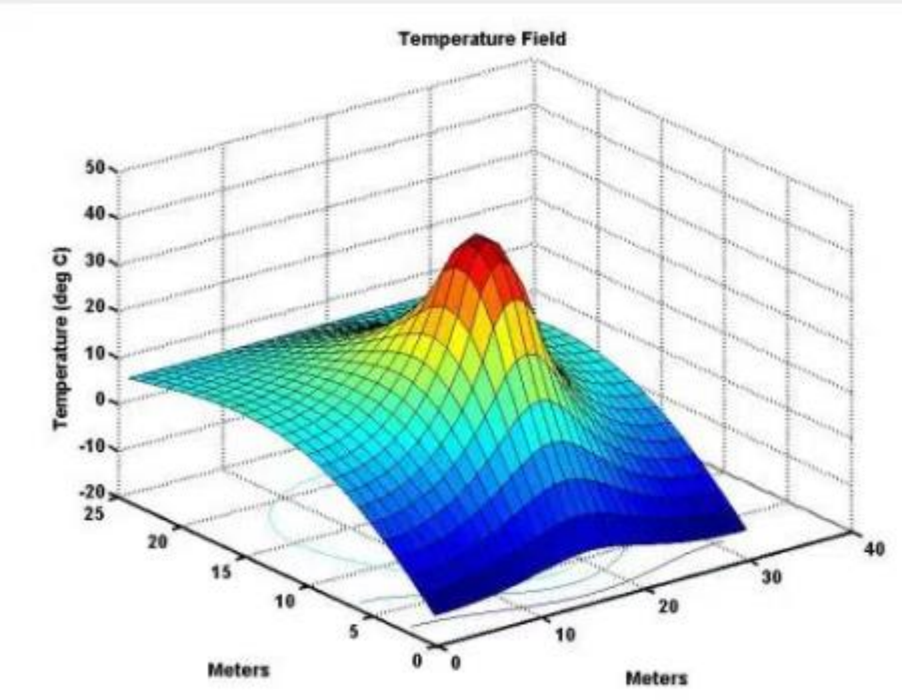
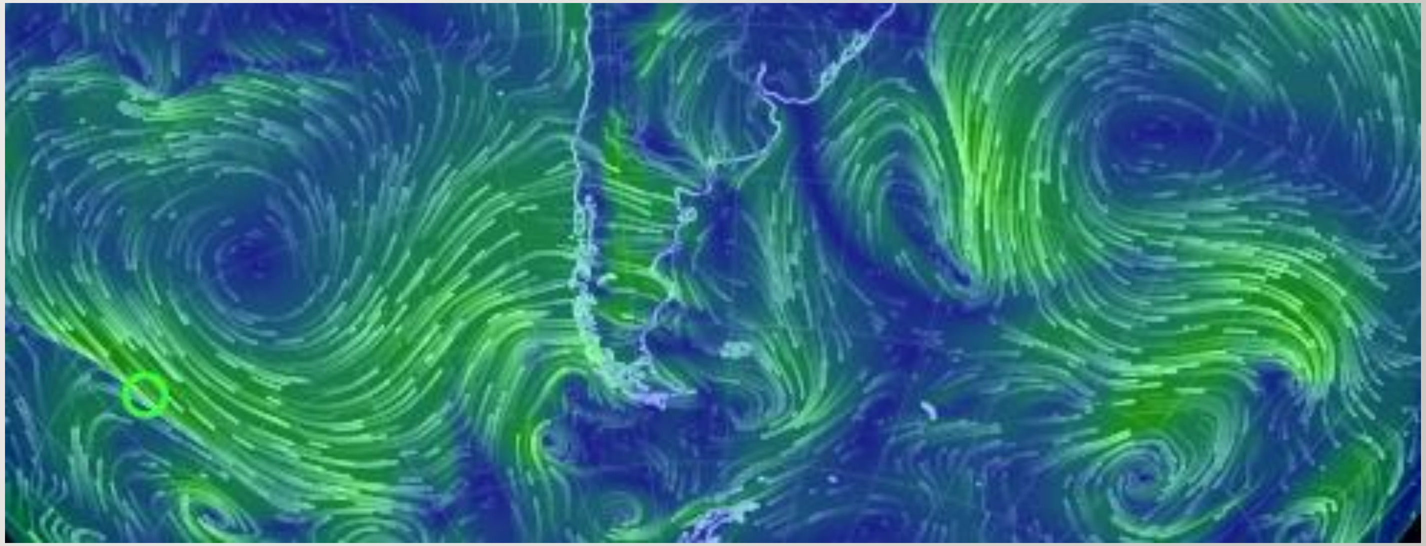
CAMPOS TENSORIALES

¿QUÉ ES UN CAMPO TENSORIAL?

- Un campo tensorial asocia a un tensor T$(\vec{x}, t)$ cada par $(\vec{x}, t)$, es decir, que las componentes de T$(\vec{x}, t)$ varían en el espacio $\vec{x}$ y en el tiempo t. Es una asignación de una aplicación multilineal a cada punto de un dominio del espacio.



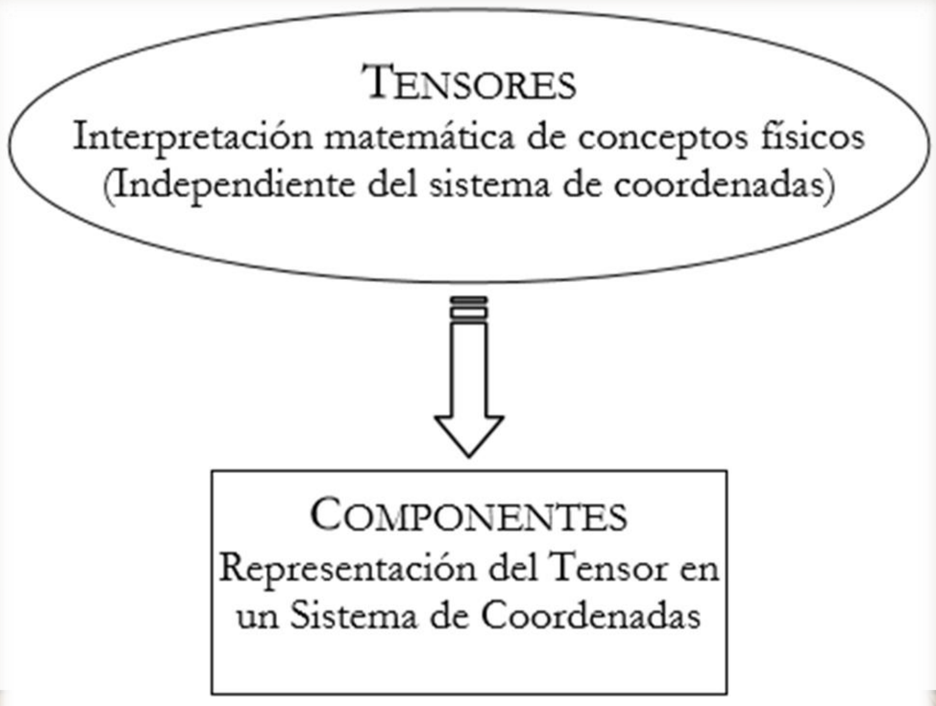
Temperatura de un piso en cada punto del mismo en un tiempo fijo.



Líneas de campo correspondientes al flujo de viento

Y UN TENSOR… ¿QUÉ ES?

- Un tensor es una interpretación matemática de un concepto físico. Sus componentes adoptan valores que dependen del sistema de coordenadas elegido para representarlo.



Esquema tensor-componentes.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} = \vec{\mathbf{u}} \otimes \vec{\mathbf{v}} \quad &= (\mathrm{u}_i \hat{\mathbf{e}}_i) \otimes (\mathrm{v}_j \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= \mathrm{u}_i \mathrm{v}_j (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= \mathrm{A}_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\underbrace{\mathbf{A}}_{Tensor} = \underbrace{\mathrm{A}_{ij}}_{componentes} \; \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j}_{base}}
$$

CAMPO ESCALAR

DIFERENCIACIÓN

- Definimos una función escalar $\emptyset = \emptyset(\vec{x})$ (campo escalar) que asocia tensores de orden 0 (escalares) a cada punto del espacio $\mathbb{R}^3$. Suponiendo que $\emptyset(\vec{x})$ es diferenciable de forma continua, sabemos que existen $\partial\phi/\partial x_1,\ \partial\phi/\partial x_2$ y $\partial\phi/\partial x_3$ y son continuas en $\mathbb{R}^3$. Considerando ahora otro punto $(\vec{x} + d\vec{x})$ también diferenciable, llamamos a la diferencia entre los dos puntos $\phi(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3) - \phi(x_1,\ x_2,\ x_3) \equiv d\phi$ como *de diferencia total de* $\emptyset$.

- Para cualquier función continua $\emptyset(x_1, x_2 , x_3)$, $\mathrm{d}\emptyset$ se relaciona linealmente con dx_1, dx_2 , dx_3. Esta relación lineal viene dada por la regla de la cadena de diferenciación como:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3 \qquad \Rightarrow \qquad d\phi = \phi_{,i}\, dx_i$$

La diferenciación de las componentes de un tensor respecto a las coordenadas x_i, se expresa mediante el operador diferencial:

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x_i} \equiv \bullet_{,i}$$

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR

El gradiente $\nabla_x \phi$ viene definido como: $\nabla_{x}\phi \longrightarrow d\phi = \nabla_{x}\phi \cdot d\mathbf{x}$,
donde el operador ∇_x es denominado *operador nabla*

Las componentes de $\nabla_x \phi$ en coordenadas cartesianas son:

$$(\nabla_{x}\phi)_{x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad ; \quad (\nabla_{x}\phi)_{x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad ; \quad (\nabla_{x}\phi)_{x_3} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

Entonces puede definirse al gradiente $\nabla_x \phi$ en términos de componentes como:

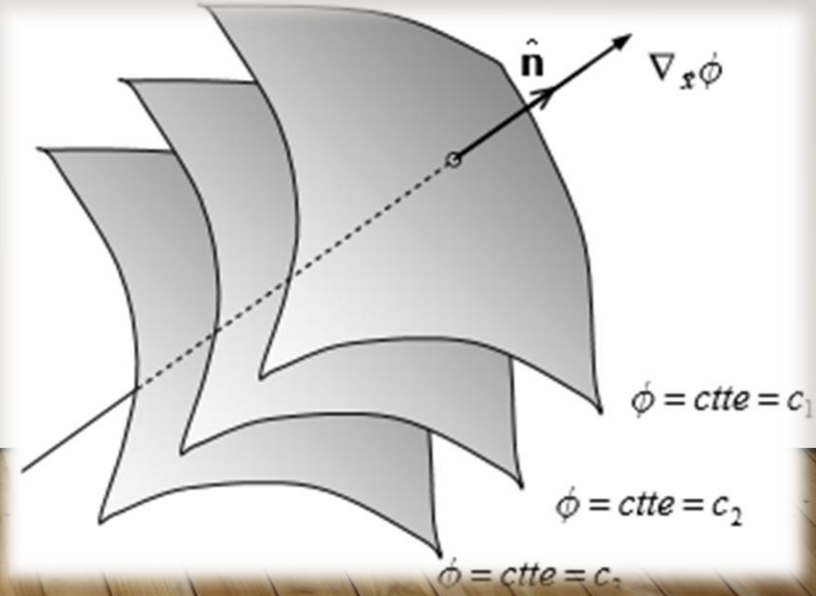
$$\nabla_{x}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\hat{\mathbf{e}}_3$$

El operador nabla puede escribirse, entonces, como:

$$\boxed{\nabla_{x} = \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\mathbf{e}}_i = \partial_{,i}\,\hat{\mathbf{e}}_i}$$

Observaciones:

- La dirección de $\nabla_x \phi$ es normal a la superficie $\emptyset$ = cte (superficie de nivel),
- Siempre apunta en la dirección creciente de $\emptyset$,
- Se puede definir la normal a la superficie como $\vec{n} = \dfrac{\nabla_{\vec{x}}\phi}{\left\|\nabla_{\vec{x}_{\emptyset}}\right\|}$



GRADIENTE DE UN CAMPO VECTORIAL

$$\text{Grad}\,\overrightarrow{(v)} = \nabla_{\vec{x}}(\vec{v})$$

Utilizando la definición del operador nabla:

$$\nabla_{\vec{x}}\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial(\mathrm{v}_i\hat{\mathbf{e}}_i)}{\partial x_j}\otimes\hat{\mathbf{e}}_j = (\mathrm{v}_i\hat{\mathbf{e}}_i)_{,j}\otimes\hat{\mathbf{e}}_j = \mathrm{v}_{i,j}\,\hat{\mathbf{e}}_i\otimes\hat{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}\hat{\mathbf{e}}_i\otimes\hat{\mathbf{e}}_j$$

$$\mathrm{v}_{i,j} = \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

El gradiente de un vector resulta un tensor de segundo orden

Con eso, se define el gradiente de un campo tensorial $(\bullet(\vec{x},t))$ en la base cartesiana como:

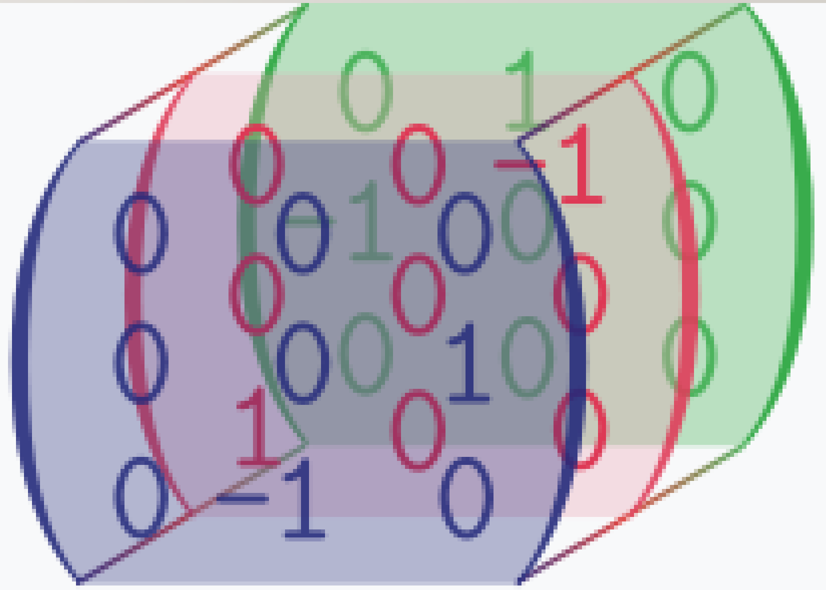
$$\boxed{\nabla_{\vec{x}}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_j} \otimes \hat{\mathbf{e}}_j}$$

Ejemplo de un gradiente de un tensor de segundo orden:

$$\nabla_{\vec{x}}\mathbf{T} = \frac{\partial(T_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)}{\partial x_k} \otimes \hat{\mathbf{e}}_k = T_{ij,k}\ \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k$$

Y sus componentes son:

$$(\nabla_{\vec{x}}\mathbf{T})_{ijk} \equiv T_{ij,k}$$



DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

$$\mathrm{Div}(\vec{v}) = \nabla_{\bar{x}} \cdot \vec{v}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{x}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \nabla_{\bar{x}} \vec{\mathbf{v}} : \mathbf{1} \quad &= \left[\mathrm{v}_{i,j}\, \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \right] : \left[\delta_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \right] \\ &= \mathrm{v}_{i,j} \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= \mathrm{v}_{k,k} \\ &= \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_3}\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{x}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \nabla_{\bar{x}} \vec{\mathbf{v}} : \mathbf{1} \quad &= \left[\mathrm{v}_{i,j}\, \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \right] : \left[\delta_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \right] \\ &= \left[\mathrm{v}_{i,j} \delta_{kl} \delta_{lj} \hat{\mathbf{e}}_i \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= \left[\mathrm{v}_{i,k} \hat{\mathbf{e}}_i \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= \frac{\partial \left[\mathrm{v}_i \hat{\mathbf{e}}_i \right]}{\partial x_k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k\end{aligned}$$

DIVERGENCIA DE UN CAMPO TENSORIAL DE SEGUNDO ORDEN

La divergencia de un tensor de segundo orden T es: $\nabla_{\vec{x}} \cdot T$, lo que resulta ser un vector:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{x}} \cdot \mathbf{T} \equiv \mathrm{div}\mathbf{T} &= \frac{\partial(T_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)}{\partial x_k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\delta_{jk}\hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \mathrm{T}_{ik,k}\hat{\mathbf{e}}_i\end{aligned}$$

Con lo que definimos que :

$$\boxed{\nabla_{\vec{x}} \cdot (\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k}$$

Divergencia de $(\bullet)$ en la base Cartesiana

Se puede verificar también que la divergencia disminuye el orden de un tensor

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

Rot($\vec{v}$)= $\nabla_{\vec{x}} \wedge \vec{v}$

$$\boxed{\vec{\nabla}_{\vec{x}} \wedge (\bullet) = \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\mathbf{e}}_k \wedge (\bullet)}$$ *Rotacional de* $(\bullet)$ *en la base Cartesiana*

Se puede observar que el rotacional es una operación entre tensores. Entonces, utilizando la definición del producto vectorial entre vectores, obtenemos el rotacional de un vector como:

$$\mathrm{rot}(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j \wedge (\mathrm{v}_k \hat{\mathbf{e}}_k) = \frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j \wedge \hat{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial x_j} \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i = \epsilon_{ijk} \mathrm{v}_{k,j} \hat{\mathbf{e}}_i$$

Las propiedades más destacadas del rotacional de un campo son:

- Si el campo escalar $f(x,y,z)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden entonces el *rot* (**f**) =0

- Si $F(x,y,z)$ es un campo vectorial conservativo entonces *rot* (F) = 0

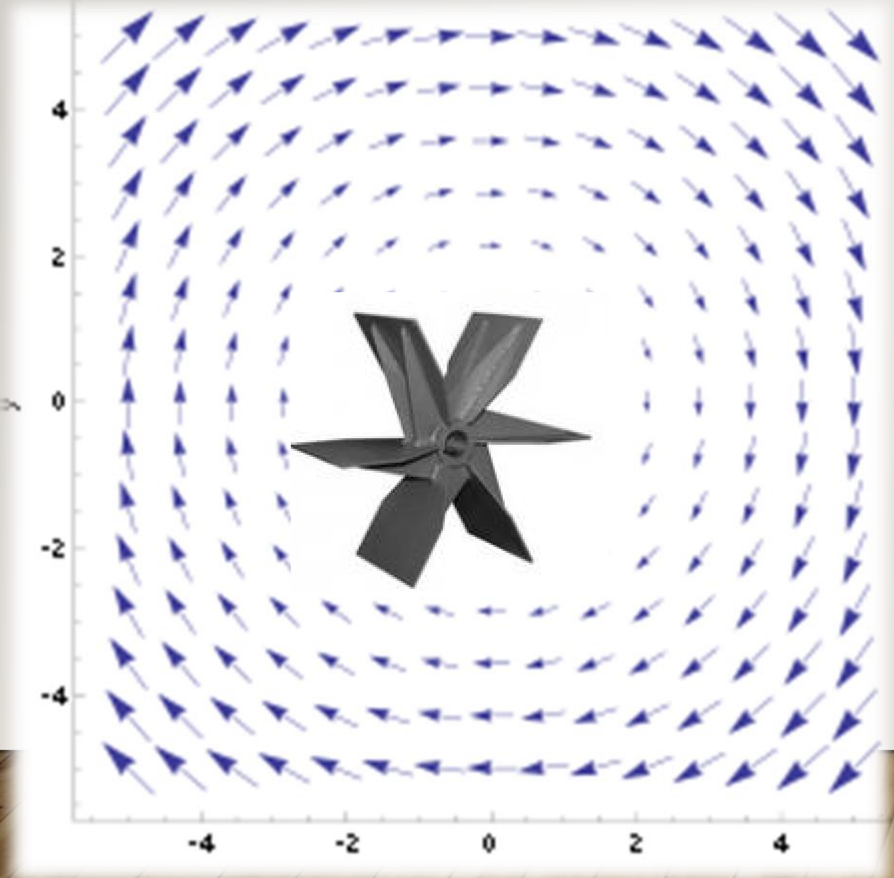
- Si el campo vectorial $F(x,y,z)$ es una función definida sobre todo $\mathbb{R}^3$cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas y el rot (F) = 0, entonces F es un campo vectorial conservativo.

- El rotacional de un campo se puede calcular siempre y cuando este sea continuo y diferenciable en todos sus puntos

Se entiende por rotacional al operador vectorial que muestra la tendencia de un campo a inducir rotación alrededor de un punto

Ejemplo:

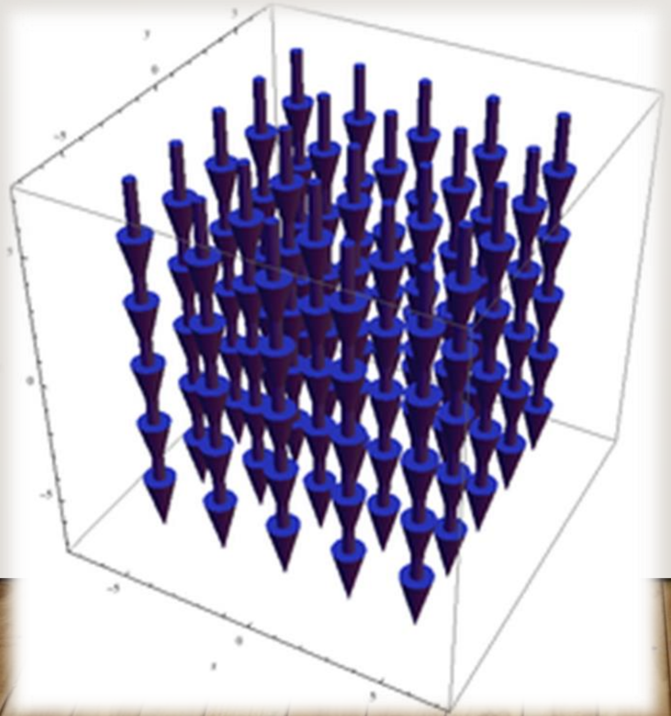
Sea el campo vectorial: F(x,y,z)= y $\hat{x}$ - x$\hat{y}$, que depende linealmente de x e y:



Mediante inspección visual, se observa que el campo está girando. Si indicáramos la dirección de un fluido y pusiéramos verticalmente una rueda de palas, tendería a rotar en el sentido de las agujas del reloj. Utilizando la regla de la mano derecha, el vector rotacional apuntará a la parte negativa del eje zeta (hacia dentro) y no contendrá componentes en el eje x o y.

Calculando el rotacional: $\nabla \times \mathbf{F} = 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\hat{\boldsymbol{y}} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}y\right]\hat{\boldsymbol{z}} = -2\hat{\boldsymbol{z}}$

Que está en la parte negativa del eje z, como se esperaba. En este caso, el rotacional es constante, independientemente de su posición. La "cantidad" de rotación es el mismo en todo punto del espacio. La siguiente figura muestra el rotacional del campo vectorial en tres dimensiones.



RESUMEN

Resumen

$\bullet$	Divergencia $\mathrm{div}(\bullet) \equiv \nabla_{\vec{x}} \cdot \bullet$	Gradiente $\mathrm{grad}(\bullet) \equiv \nabla_{\vec{x}} \bullet$	Rotacional $\mathrm{rot}(\bullet) \equiv \vec{\nabla}_{\vec{x}} \wedge \bullet$
Escalar		vector	
Vector	Escalar	Tensor (2^{ndo} orden)	Vector
Tensor (2^{ndo} orden)	Vector	Tensor (3^{er} orden)	Tensor (2^{ndo} orden)

CAMPO CONSERVATIVO

Un campo vectorial $\vec{b}(\vec{x},t)$ se denomina conservativo si existe un campo escalar ϕ diferenciable tal que: $\vec{b} = \nabla_{\vec{x}}\phi$

Una condición necesaria pero no suficiente para que $\vec{b}(\vec{x},t)$ sea conservativo es que $\nabla_{\vec{x}} \wedge \vec{b} = 0$. En otras palabras, en todo campo conservativo el rotacional es nulo, pero no todo rotacional nulo implica campo conservativo.

Ejemplo:

Sean los dos campos vectoriales siguientes:

$$\vec{A} = -\left(2ax + 3x^2z^2\right)\hat{i} - \left(2by + 3y^2z^4\right)\hat{j} - \left(2x^3z + 4y^3z^3\right)\hat{k}$$

$$\vec{B} = \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\hat{i} + \left(x^3 + 3y^2x\right)\hat{j} + z^3\,\hat{k}$$

a) ¿Cuál corresponde a un campo de fuerzas conservativo y cuál a un campo de velocidades del aire en la atmósfera terrestre alrededor de un centro de bajas presiones?

Un campo de fuerzas conservativo presenta un rotacional nulo mientras que en los alrededores de un centro de bajas presiones la corriente de aire circula rotando alrededor de este centro dando lugar a un campo de velocidades cuyo rotacional no será nulo. Por lo tanto si calculamos el rotacional de los dos campos que nos dan:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \ , \ \vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0$$

con lo cual queda claro que $\vec{A}$ hace referencia al campo de fuerzas conservativo.