Álgebra Lineal

Bazán Florencia, Impa Judith, Luchetti Carmen, Stachoni Yanina

Factorización LU

Factorización LU

- Factorización de números naturales:

24= 2.3.4

- Factorización de matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Definición:

Sea A una matriz cuadrada. Una factorización de A, podemos escribirla como A= LU, donde L es triangular inferior unitaria y U es triangular superior. A esto lo llamamos factorización LU de A.

Observación:

- Si hubo necesidad de intercambiar renglones para escalonar, A no admite una factorización LU.

¿Cómo obtenemos las matrices L y U?

Paso por paso

La factorización LU (Lower-Upper) requiere hacer una serie de operaciones elementales, similar a Gauss, para obtener las matrices triangulares

- Hay que mantener guardado los pasos seguidos.

Veamos con un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos U

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3-5/14\, F_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & 0 & 15/14 \end{pmatrix}}_{=U}$$

Obtenemos L

De la matriz anterior, nos quedan las siguientes matrices elementales:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5/14 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto...

$$E_1.E_2.E_3.A = U$$

Si despejamos A, nos queda:

$$A = \underbrace{E_1^{-1}.E_2^{-1}.E_3^{-1}}_{=L}.U$$

$$L= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5/14 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1

Si A es una matriz cuadrada que puede reducirse a forma escalonada, sin usar intercambios de renglón, entonces A tiene una factorización LU.

Teorema 2

Si A es una matriz invertible que tiene factorización LU, entonces L y U son únicas.

Una aplicación útil de este tipo de factorización

Podemos usarla para despejar x, del sistema Ax=b.

Para ver mejor este tipo de aplicación, lo vemos con un ejemplo.

Paso por paso

Usamos una factorización LU de:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =LU$$

Queremos resolver Ax=b, donde b es:

$$b=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Entonces para resolver Ax=b, hacemos:

L(Ux)=b y llamamos y=Ux

Primero resolvemos Ly=b para y:

$$y=\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} y_1=1 \\ 2y_1+y_2=-4 \\ -y_1-2y_2+y_3=9 \end{cases}$$

De este sistema obtenemos los valores de “y”, quedándonos de la siguiente manera:

$$y=\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Y ahora se resuelve Ux=y para x:

$$x=\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

Este sistema lineal, nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ -3x_2-3x_3=-6 \\ 2x_3=-2 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución al sistema Ax=b es:

$$x=\begin{pmatrix} ½ \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Factorización PA=LU

Factorización PA=LU

Cuando no se pueden escalonar las matrices solamente con operaciones de eliminación, es necesario permutar las filas.

En este caso, tenemos que utilizar el método PA=LU, donde P es la matriz de permutación.

Matriz de Permutación

Se obtiene de cambiar de lugar los renglones de la matriz identidad.

Teorema:

Si P es una matriz de permutación, entonces $P^{-1}=P^T$.

Definición:

Sea A una matriz cuadrada. Una factorización de A, como $A=P^TLU$, donde P es una matriz de permutación, L es triangular inferior y U es triangular superior, se llama factorización P^TLU de A.

¿Como factorizamos $A=P^TLU$?

Obtenemos P

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Primero reducimos A de forma escalonada por renglones. Claramente vemos que es necesario hacer al menos, un intercambio de renglón.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3-2R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se usaron dos intercambios de renglón.

La matriz de permutación requerida es:

$$P=P1P2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y teniendo P podemos seguir calculando PA=LU

Teorema:

Toda matriz cuadrada tiene una factorización $P^T LU$.

Factorización QR

Factorización QR de una Matriz

Dada una matriz A (no necesariamente cuadrada), con columnas linealmente independientes, encontraremos matrices Q, R tales que:

- A = QR.
- Las columnas de Q son un conjunto ortonormal.
- Q es del mismo tamaño que A.
- R es triangular superior invertible.

La forma de hacerlo es aplicando el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de A.

Proceso de Gram-Schmidt

A partir de los vectores linealmente independientes $v_1, \ldots,$ v_n se construyen

$u_1 = v_1$

$$uk = vk - \sum \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{||u_j||^2} u_j \qquad j=1,2,3..$$

Los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son ortogonales.|

Veamos con un ejemplo cómo sacar las matrices Q y R mediante el método G-S

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las columnas son

$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0)$

$\mathbf{v}_2 = (1,1,0,1)$

$\mathbf{v}_3 = (1,0,1,1)$

Apliquemos el proceso de Gram-Shmidt en A

- $u_1 = v_1 = (1, 0, 0, 0)^t$.
- $u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1 = v_2 - u_1 = (1,0,1,0)^t$
- $u_3 = v_3 - \left(\dfrac{\langle v_3, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1 + \dfrac{\langle v_3, u_2 \rangle}{||u_2||^2} u_2 \right) = v_3 - u_1 - u_2 = (0,-½ ,1,½)^t$

Ahora se tiene:

$$A = (v_1, v_2, v_3)$$

$$= (u_1 \mid u_1 + u_2 \mid u_1 + \tfrac{1}{2} u_2 + u_3)$$

$$= (u_1 \mid u_2 \mid u_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{u_1}{\|u_1\|} \,\middle|\, \frac{u_2}{\|u_2\|} \,\middle|\, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right)}_{=Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \|u_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|u_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=R}$$

Iteración QR para hallar autovalores aproximados de una matriz

Procedimiento

- $A = A_1$
- Para k=1, 2, ...

$$A_k = Q_k R_k$$

- Se construye

$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

Observaciones

- Cada A_k, con k=1, 2, … es semejante a A.

- Se llega a una matriz triangular superior o triangular superior por bloques, cuyos autovalores son de fácil cálculo

Ejemplo

```
>> E=[1 1;2 1]

E =

     1     1
     2     1

>> [Q,R]= qr(E)

Q =

    0.4472    0.8944
    0.8944   -0.4472


R =

    2.2361    1.3416
         0    0.4472
```

```
>> E=R*Q

E =

    2.2000    1.4000
    0.4000   -0.2000
```

4 x

```
>> [Q,R]= qr(E);E=R*Q

E =

    2.4141    1.0004
    0.0004   -0.4141

>> [Q,R]= qr(E);E=R*Q

E =

    2.4142   -0.9999
    0.0001   -0.4142

>> [Q,R]= qr(E);E=R*Q

E =

    2.4142    1.0000
    0.0000   -0.4142
```

Comprobemos:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1 - 2\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414213562$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0.414213562$$

Factorización QR Modificada

Cuando una matriz no tiene columnas linealmente independientes, no funciona el proceso de Gram-Schmidt. Entonces necesitamos una factorización QR generalizada de la matriz A.

Teorema

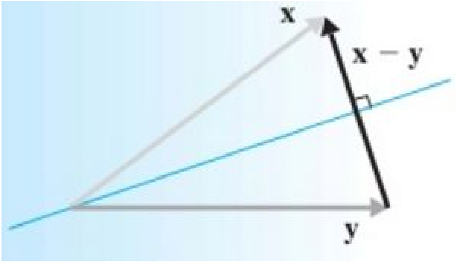
Sea Q una matriz de nxn. Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) Q es ortogonal.
b) $||Q\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ para todo $\mathbf{x}$ en R^n
c) $Q\mathbf{x}.Q\mathbf{y} = \mathbf{x}.\mathbf{y}$ para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en R^n

(Demostración)

El “**análogo ortogonal**” de una matriz elemental

Necesidad de que $||\mathbf{x}|| = ||Q\mathbf{x}|| = ||\mathbf{y}||$



Podemos reflejar **x** en una línea perpendicular a **x-y**.

Reflexión

F_l : la transformación que refleja un vector en l que pasa por el origen de R^2

Si

$$u = (1/\|x-y\|)(x-y) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

es el vector unitario en la dirección **x-y**, entonces $\mathbf{u}^{\perp} = \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$ es **ortogonal** a **u**.

Podemos encontrar la **matriz estándar Q de la reflexión** en la recta que pasa a través del origen en la dirección de $\mathbf{u}^{\perp}$.

$P_l: R^2 \rightarrow R^2$: transformación lineal que proyecta un vector(o un punto) sobre la recta l

P es una transformación matricial con matriz estándar.

En el plano xy, la forma general de la ecuación de una línea recta es ax + by =c.

Si b es distinto de cero, entonces la ecuación puede reexpresarse como

$$y = -(a/b)\, x + c/b$$

- El vector **n** es perpendicular a la recta, es decir, es **ortogonal** a cualquier vector que sea paralelo a la recta.Es el vector **normal** a la línea recta.

¿Cuál es el significado del vector d?

Es un particular vector paralelo a l (vector de dirección) para la recta.

Sea la recta l que tiene un vector con dirección **d** y **v** un vector arbitrario. Entonces, P_l está dado por $\mathrm{proy}_{\mathbf{d}}$ (**v**) (la proyección de **v** sobre **d**)

Matriz de Householder

Definición de Q (por generalización)

Si **u** es cualquier vector unitario en R^n definimos una matriz Q de nxn como

$$Q = I - 2\,\mathbf{u}\mathbf{u}^{\perp}$$

Una matriz de este tipo se denomina **Matriz de Householder** (o **reflector elemental**)

Matriz de Householder

Hace que a cada vector **x** de un espacio vectorial lo refleje con respecto a un hiperplano (que llamo S, ya que es un subespacio) que tiene como normal a un **w**.

Observaciones

- Su propiedad es ser un proceso que conduce a una **"triangularización de la matriz dada mediante transformaciones ortogonales"** (caso real) **"o unitarias"** (caso complejo)**.**
- Este método es el resultado de aplicar un teorema general del Álgebra que establece que "toda transformación ortogonal (o unitaria) es un producto de simetrías (reflexiones)".
- Tratamos de realizar sobre la matriz A una serie de transformaciones unitarias (u ortogonales, en el caso real) Q1, Q2, ... ,Qn tales que Qn...Q1 A =R sea una matriz triangular superior.

Esta factorización completa se produce cuando cada Q_i es unitaria(ortogonal en el caso real) y de tamaño m x m y, R es de tamaño m x n.

Este método propuesto por Alston Householder en el año 1958, es una forma ingeniosa de diseñar matrices unitarias Q_k donde las operaciones son:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_1} \underset{Q_1 A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_2} \underset{Q_2 Q_1 A}{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_3} \underset{Q_3 Q_2 Q_1 A}{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

x→ elemento de la matriz, no necesariamente cero.

*→ elemento que se ha modificado recientemente.

En general, opera sobre las filas k, … ,m.

Propiedades de las Matrices de Householder

Toda **Matriz de Householder** Q satisface las siguientes propiedades:

- **Q es simétrica**
- **Q es ortogonal**
- **Q es unipotente**

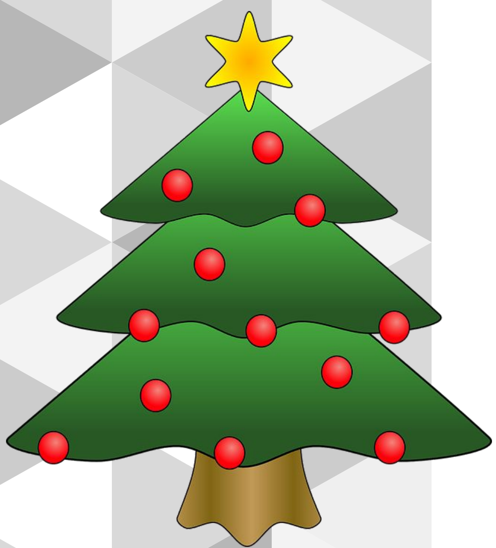
Rotaciones de Givens

Es otra manera de calcular la factorización QR.

Son matrices cuadradas cuyo efecto aplicado a un vector es rotar un ángulo .

Ejemplo: $$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Además introducen ceros en vectores o matrices. Gracias a esto, se pueden aplicar varias matrices de Givens para triangularizar una matriz A. Por esta propiedad para llegar a una matriz triangular superior R. Luego Q será el producto de las matrices transpuestas de Givens que se necesitaron para obtener R a partir de A.



¡Felices Fiestas!